

Örnek Problem

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = f(x)$$

türevlenebilir bir fonksiyondur.

$$f(0) = 2 \text{ ve } f'(0) = 1 \text{ 'dir.}$$

$$f(x) \cdot f''(x) = \frac{-1}{x+1}$$

olduğuna göre; aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

- a. $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$
- b. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- c. f , daima artandır.
- d. $\frac{1}{2} < f'(1) < \frac{3}{4}$
- e. $\frac{5}{2} < f(1) < 3$

Çözüm

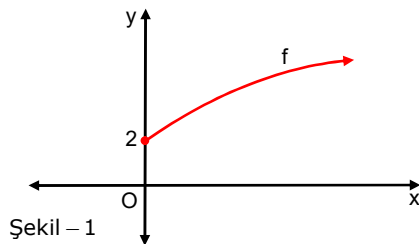
$$f(0) = 2 \text{ ve } f(x) \cdot f''(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot f''(0) = -1$$

$$\Rightarrow f''(0) = \frac{-1}{2} \text{ olur.}$$

$$f'(0) = 1 \text{ ve } f''(0) = \frac{-1}{2} \text{ olduğuna göre;}$$

$x > 0$ iken $f'(0) > 0$ olup f artan ve f' azalan olur. f fonksiyonunun grafiği kabaca Şekil-1'deki gibidir.



Şekil - 1

★ Sezgi ile kabaca çizdiğimiz grafiğin ayrıntılarını, kanıtlarıyla ortaya koyalım:

$$f'(0) > 0 \text{ ve } f''(0) < 0 \text{ 'dır.}$$

Buna göre; 0'ın sağ komşuluğunda, fonksiyonun değerinin artma miktarı azalsa da, artması sürecektir.

Bu durumda; bir x gerçel sayısı için $f'(x) = 0$ olabilir mi? f fonksiyonu bir maksimum değere ulaşır mı?

$x \geq 0$ olduğundan

$$f(x) \cdot f''(x) = \frac{-1}{x+1} < 0 \text{ olur.}$$

0'ın sağ komşuluğunda $f(x) > 0$ ve $f''(x) < 0$ 'dır. Bu, tersine dönebilir mi?

$f(x) < 0$ ve $f''(x) > 0$ olabilir mi?

Olamaz. Çünkü; türevlenebilir bir fonksiyonda bu, bir x değeri için, $f''(x) = 0$ olmasını gerektirir.

Bu da, tanım kümesinde gerçekleşemez. Neden? (Eşitliği inceleyiniz)

Öyleyse; gerçel sayılarda, $f'(x) > 0$ olur.

f fonksiyonunun teğetinin eğimi pozitif olacağından, fonksiyonun değeri sınırsız artar.

$$★ f(x) \cdot f''(x) = \frac{-1}{x+1} \text{ ve } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x+1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0 \text{ olur.}$$

Bu açıklamalarımıza göre;

a. " $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$ " önermesi doğrudur.

b. f fonksiyonunun tanım kümesinde, fonksiyonun değeri sınırsız artacağından " $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ " önermesi doğrudur.

c. " f , daima artandır." önermesi doğrudur.

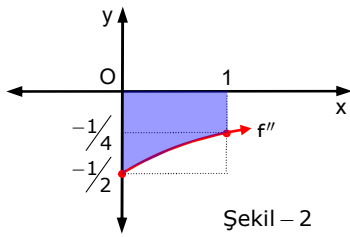
d. $f(x) \cdot f''(x) = \frac{-1}{x+1}$ eşitliğinde,

$x = 1$ koyalım:

$$f(1) \cdot f''(1) = \frac{-1}{2} \text{ olur.}$$

$$2 = f(0) < f(1) \text{ olup } f''(1) > \frac{-1}{4} \text{ bulunur.}$$

f'' türev grafiği, kabaca, Şekil-2'deki gibidir.



Şekil-2'ye göre;

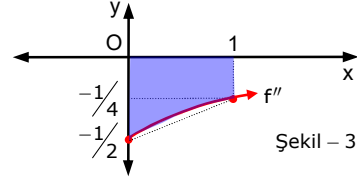
$$\int_0^1 f''(x) dx = f'(x) \Big|_0^1 = f'(1) - f'(0) \text{ olur.}$$

Bu integral değeri, $\frac{-1}{2}$ alt toplamı ile $\frac{-1}{4}$ üst toplamı arasındadır.

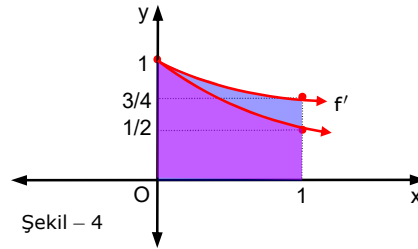
$$\begin{aligned} \frac{-1}{2} &< f'(1) - f'(0) < \frac{-1}{4} \\ \Rightarrow \frac{-1}{2} &< f'(1) - 1 < \frac{-1}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &< f'(1) < \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

" $\frac{1}{2} < f'(1) < \frac{3}{4}$ " önermesi doğrudur.

Not: Şekil-3'e göre, alt toplamın $\frac{-3}{8}$ alınabileceği görülür. Aralık daraltılabilir. Bu aralığı siz bulunuz.



e. $f'(0) = 1$, $\frac{1}{2} < f'(1) < \frac{3}{4}$ ve f' değerinin azalma miktarı azalacağından; f' türev grafiği kabaca Şekil-4'deki gibi iki grafikten ya da bunlar arasından geçecek başka grafiklerden biri olabilir.



Şekil-4'e göre;

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) \text{ olur.}$$

Bu integral değerinin, $\frac{1}{2}$ alt toplamı ile 1 üst toplamı arasında olacağını görünüz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< f(1) - f(0) < 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &< f(1) - 2 < 1 \\ \Rightarrow \frac{5}{2} &< f(1) < 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

" $\frac{5}{2} < f(1) < 3$ " önermesi doğrudur.

Not: "d" maddesinde, f' için önerdiğimiz "alt dar" aralığı kullanarak; Şekil-4'te de daha dar üst aralığı kullanarak aralık daraltılabilir.

Bu dar aralığı siz bulunuz.

Siz Çözünüz

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = f(x)$$

türevlenebilir bir fonksiyondur.

$$f(0) = 2 \text{ ve } f'(0) = 1 \text{ 'dir.}$$

$$f(x) \cdot f''(x) = \frac{-1}{x+1}$$

olduğuna göre; aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$

b. f' , daima azalandır.

c. f'' , daima artandır.

d. $\frac{7}{12} < f'(5) < 1$

e. $\frac{59}{12} < f(5) < 7$

✦ Açıklama

Örnek problemi,

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = 2\sqrt{x+1}$$

fonksiyonu üzerinde çalışarak düzenlemiştim.

Bu fonksiyon kullanılarak, gerçek değerler ile yorumlarla bulunan değerler arasındaki ilişkiler incelenebilir.