

MATEMATİK – 6

6'DAN 9'A

1. KİTAP

1. Doğal Sayılar
2. Çarpanlar ve Katlar
3. Kümeler

MUHARREM ŞAHİN

UMUT ŞAHİN

3.1 Küme Kavramı

Bahçenizdeki ağaçlar, sınıfınızdaki öğrenciler, masanızın üzerindeki eşyalar, tabağınızdaki meyveler, Güneş sistemindeki gezegenler, doğrular, üçgenler, sayılar,... gibi somut ya da soyut **nesne topluluklarının** her biri birer **küme** oluşturur.

► Tabağınızda bir elma, bir armut ve bir portakal bulunduğunu varsayınız. Bu meyveler topluluğunun oluşturduğu kümeyi,

$$\{\text{Tabağınızdaki meyveler}\}$$

biçiminde ya da

$$\{\text{Elma, Armut, Portakal}\}$$

biçiminde gösteririz.

Kümeleri büyük harflerle adlandırırız:

$$M = \{\text{Elma, Armut, Portakal}\} \text{ gibi.}$$

► *Bir kümeyi oluşturan nesnelerin her birine o kümenin **elemanı** denir.*

Bir a nesnesi bir A kümesinin elemanı ise bu " $a \in A$ " biçiminde; değilse, bu da " $a \notin A$ " biçiminde gösterilir. Bu ifadeler sırasıyla "**a eleman A**" ve "**a eleman değil A**" diye okunur.

Örneğin M kümesi için,

" $\text{Elma} \in M$ " ve " $\text{Erik} \notin M$ " yazılabilir.

► Bir A kümesinin eleman sayısı " $s(A)$ " sembolü ile gösterilir:

Örneğin; $M = \{\text{Elma, Armut, Portakal}\}$ kümesi için $s(M) = 3$ 'tür.

► "**Küme**" denilince, her zaman, tabaktaki meyveler gibi "**Bir araya getirilmiş nesneler topluluğu**" anlaşılmalıdır.

"Kümeler, belirtilen özellikleri ile diğer nesnelerden ayırt edilen nesnelerin oluşturduğu sınıflardır" denilebilir.

Örnek – 3.1

Aşağıdaki küme örneklerinde, elemanların diğer nesnelerden nasıl ayırt edildiğine dikkat ediniz.

- a. $A = \{\text{Sınıfınızdaki öğrenciler}\}$
- b. $B = \{\text{Güneş sistemindeki gezegenler}\}$
- c. $C = \{\text{Türkiye'deki ilköğretim 6. sınıf öğrencileri}\}$
- d. $D = \{\text{Türk alfabesindeki sesli harfler}\}$
- e. $E = \{\text{Eşkenar üçgenler}\}$
- f. $F = \{\text{Bir basamaklı doğal sayılar}\}$

► Bir kümenin elemanlarının özelliklerinin anlatıldığı ifade hangi nesnelerin bu kümeye ait olduğunu, hangilerinin olmadığını tam olarak belirtmelidir.

Örnek – 3.2

"Türkiye'deki illerden üçü" ifadesi bir küme belirtmez. Çünkü, bu ifadeye dayanılarak belirli bir küme değil, çok sayıda değişik kümeler yazılabilir.

$$A = \{\text{Bolu, Ordu, Muş}\},$$

$$B = \{\text{İzmir, Rize, İçel}\}, \dots \text{ gibi.}$$

Örnek – 3.3

"Türkiye'nin en kalabalık üç ili" ifadesi bir küme belirtir. Çünkü; bu ifadeye dayanılarak, elemanları tam olarak belirlenmiş yalnız bir küme yazılabilir. Bu kümeyi K ile adlandıırırsak;

$$K = \{\text{Türkiye'nin en kalabalık üç ili}\}$$

ya da

$$K = \{\text{İstanbul, Ankara, İzmir}\} \text{ olur.}$$

Örnek – 3.4

$A = \{\text{Bir işyerinde çalışan yaşlı elemanlar}\}$ ifadesi ile bir küme tanımlanamaz. Bu ifadeye dayanarak, herkes farklı bir küme düşünebilir.

Kaç yaşın üzerindeki elemanların yaşlı sayılacağı belirtilmemiştir.

Örnek – 3.5

Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir küme belirtir?

- I. “Sınıfınızdaki uzun boylu öğrenciler”
- II. “Ailenizin en kısa boylu üyesi”
- III. “1’den küçük bir doğal sayı”
- IV. “8’den küçük bir doğal sayı”

Çözüm

I.’deki ifade bir küme belirtmez. Bu ifadeye dayanarak, sınıfınızdaki öğrencilerin her biri bir küme yazsa, bunlar farklı farklı kümeler olurdu. Çünkü ifadede, hangi uzunluğun üzerindeki boyların uzun sayılacağı belirtilmemiştir.

II.’deki ifade bir küme belirtir. Ailenizdeki en kısa boylu kişi, belirli biridir.

III.’teki ifade bir küme belirtir. 1’den küçük bir doğal sayı sadece “0” olup bu küme {0}’dir.

IV.’teki ifade bir küme belirtmez. Çünkü, bu ifadeye dayanılarak birbirinden farklı 8 küme yazılabilir.

➤ Bir kümede her eleman yalnız bir kere yazılır.

Örnek – 3.6

“KARIŞIKLIK” sözcüğündeki harflerin kümesini yazınız.

Bu küme kaç elemanlıdır?

Çözüm

İstenen kümeyi H ile adlandıralım:

$H = \{K, A, R, I, Ş, L\}$ ve $s(H) = 6$ olur.

“KARIŞIKLIK” sözcüğünde kullanılan harfler, H kümesinin elemanlarıdır. K ile I harfleri üçer kere, diğerleri birer kere kullanılmıştır.

Sözcükteki, örneğin; K harfleri farklı nesneler değildir. Aynı K harfi sözcükte üç farklı yerde kullanılmıştır. Kümedeki K harfi üçünü de temsil etmektedir.

Örnek – 3.7

6 kişilik bir grubun üyelerinden üçünün adı Barış, ikisinin adı Onur, birinin adı Umut’tur.

Buna göre;

- a. Bu grubun üyelerinin adlarının kümesini;
- b. Bu grubun üyelerine ad olan dört harfli sözcüklerin kümesini;
- c. Adı Barış olan üyelerin kümesini yazınız.

Çözüm

- a. Kümeyi A ile adlandıırırsak,

$A = \{\text{Barış, Onur, Umut}\}$ olur.

Adı Barış olan üç kişi, Onur olan iki kişi bulunmasına karşın kümede bunların birer kere yazıldığına dikkat ediniz.

- b. Kümeyi B ile adlandıırırsak,

$B = \{\text{Onur, Umut}\}$ olur.

- c. Burada adı Barış olan üyelerin farklı kimlikleri söz konusudur. Bu kümeyi elemanları ile yazabilmemiz için bu üyelerin ayırtıcı özelliklerini bilmemiz gerekir. Örneğin; bunların soyadları Kutlu, Yılmaz, Mert ise bu küme, $C = \{\text{Barış Kutlu, Barış Yılmaz, Barış Mert}\}$ olur.

3.2 Kümelerin Gösterilmesi

Kümeler kağıt üzerinde değişik yöntemlerle gösterilebilir. Bunlardan ikisini, yukarıda adlarını vermeden kullandık: Liste Yöntemi ve Ortak Özellik Yöntemi.

Bunlara Şema Yöntemini de ekleyeceğiz.

Bu üç yöntemi sıra ile açıklayalım:

Ortak Özellik Yöntemi

Nesnelerin bir kümenin elemanları olması, onları diğer nesnelerden ayıran özellikleri nedeniyledir. Kümeler, elemanlarının ortak özellikleri verilerek gösterilebilirler.

Örnek – 3.1’deki kümeleri ortak özellik yöntemi ile vermiştik. Yine örnekler vereceğiz.

Liste Yöntemi

Kümenin elemanları "{...}" biçiminde bir parantez içine tek tek yazılır; elemanların arasına virgül konur. Elemanlar istenilen sıra ile yazılabilir.

Örnek – 3.8

Ortak özellik yöntemi ile verilmiş,

$$D = \{6\text{'dan küçük olan doğal sayılar}\}$$

kümesinin liste yöntemi ile yazılmış biçimi

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ olur.}$$

Burada, önemli bir ayrıntıyı açıklayalım:

"6'dan küçük olan doğal sayıların kümesi" demek, bu koşula uyan tüm elemanların kümesi demektir. Örneğin; $E = \{0, 1, 2, 5\}$ kümesinin elemanları da 6'dan küçüktür. Ancak; koşula uyan 3 ve 4 elemanları alınmadığı için, bu küme "6'dan küçük olan doğal sayıların kümesi" değildir.

Örnek – 3.9

Tabağınızda bir yeşil elma, bir kırmızı elma, bir yeşil armut ve bir sarı armut bulunduğunu varsayarak aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

- a. $A = \{\text{Tabağınızdaki nesneler}\}$
- b. $B = \{\text{Tabağınızdaki meyve türleri}\}$
- c. $C = \{\text{Tabağınızdaki farklı tür meyvelerden yeşil olanları}\}$
- d. $D = \{\text{Tabağınızdaki meyvelerin adı olan dört harfli sözcükler}\}$
- e. $E = \{\text{Tabağınızdaki elmalar}\}$

Çözüm

- a. $A = \{\text{yeşil elma, kırmızı elma, yeşil armut, sarı armut}\}$
- b. $B = \{\text{elma, armut}\}$
- c. $C = \{\text{yeşil elma, yeşil armut}\}$
- d. $D = \{\text{elma}\}$
- e. $E = \{\text{yeşil elma, kırmızı elma}\}$

Şema Yöntemi

Kümenin elemanları kapalı, düzlemsel bir şekil içinde gösterilebilir.

Bu şekilde, elemanlar birer nokta ile temsil edilirler.

Bu biçimde oluşturulan şemaya **Venn şeması** denir. Şemanın şekli istenilen biçimde seçilebilir.

Venn şeması, kümelerle yapılacak işlemleri kolaylaştırır.

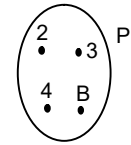
Örnek – 3.10

"34 BB 243" plakasındaki karakterlerin kümesini Venn şeması ile gösteriniz.

Çözüm

Kümenin adına P diyelim.

Venn şeması
şekildeki gibi seçilebilir.



Şemanın şekli farklı biçimde de seçilebilirdi :

**Örnek – 3.11**

$A = \{3, 5, 7\}$ kümesini ortak özellik yöntemi ile yazınız.

Çözüm

3, 5, 7 nesneleri değişik ortak özelliklerine dayanılarak aynı kümenin elemanları olarak yazılabilirler.

Örneğin;

$$A = \{10\text{'dan küçük olan tek asal sayılar}\}$$

$$A = \{35375 \text{ sayısındaki rakamlar}\}$$

$$A = \{\text{Komşunuzun çocuklarının yaşları}\}$$

olabilir.

➤ Eleman sayıları bu elemanların tek tek yazılmasına olanak vermeyecek kadar büyük olan kümeler, zorunlu olarak ortak özellik yöntemi ile yazılırlar.

Örnek – 3.12

Isı ve ışık kaynağı olan gök cisimlerine **yıldız** denir.

Buna göre; $A = \{\text{Evrendeki yıldızlar}\}$ kümesinin elemanları tanımlıdır. Buna karşın; bilinen çok sayıda yıldızların yanında henüz keşfedilmeyen çok sayıda yıldız bulunabileceğinden bu kümeyi liste yöntemi ile yazamayız.

Örnek – 3.13

$K = \{\text{Eşkenar üçgenler}\}$ kümesini liste yöntemi ile yazmayı düşünemezsiniz. Sınırsız sayıdaki elemanı tek tek kaydetmek mümkün değildir.

Boş Küme

➤ *Elemanı olmayan kümeye boş küme denir.*

Boş küme “{ }” veya “ $\emptyset$ ” sembollerinden biri ile gösterilir.

Örneğin;

$A = \{0\text{'dan küçük doğal sayılar}\}$ kümesi bir boş kümedir.

$A = \emptyset$ veya $A = \{ \}$ ile aynı kümedir.

Boş kümenin eleman sayısı 0'dır.

Siz Çözünüz

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir küme belirtir?

- “Türkiye'nin kalabalık şehirleri”
- “10'dan küçük doğal sayılardan beşi”
- “Dünyanın, 500 km'den uzun akarsuları”
- “Evrendeki yıldızlar”
- “Ailenizdeki erkekler”
- “Matematik” sözcüğündeki harfler

2. Aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

- $A = \{27 \text{ gün çeken aylar}\}$
- $B = \{\text{Adı 5 harfli olan günler}\}$
- $C = \{\text{Sınıfınızdaki gözlüklü öğrenciler}\}$
- $D = \{\text{Güneş sistemindeki gezegenler}\}$
- $E = \{\text{Türkiye'nin denizleri}\}$
- $F = \{\text{Masanızın üzerindeki eşyalar}\}$

3.3 Kümelerin Karşılaştırılması

Eşit Kümeler

➤ *Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir.*

A ve B kümeleri eşit ise, bu “ $A = B$ ” biçiminde gösterilir; “**A eşit B**” diye okunur.

Örnek – 3.14

$A = \{3\text{'ten küçük sayma sayıları}\}$ ve

$B = \{4\text{'ten küçük ve } 2\text{'nin doğal sayı kuvveti olan sayılar}\}$ olsun.

Bu kümeleri liste yöntemi ile yazdığımızda

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olduğunu görürüz.

Öyleyse; $A = B$ 'dir.

Örnek – 3.15

$A = \{2, 3, 4, a\}$ ve $B = \{1, 2, 3, b\}$ kümelerinde a ile b birer rakamı göstermektedir.

$A = B$ olduğuna göre a + b kaçtır ?

Çözüm

Bu kümelerin eşit olması için $a = 1$ ve $b = 4$ olmalıdır. Buna göre; $a + b = 5$ olur.

Siz Çözünüz

Aşağıdaki kümelerden hangileri eşittir?

$A = \{\text{“AZIK” sözcüğündeki harfler}\};$

$B = \{\text{“KIZAK” sözcüğündeki harfler}\};$

$C = \{\text{“KAZIK” sözcüğündeki harfler}\}$

Alt Küme

► Bir A kümesinin her elemanı bir B kümesinin de elemanı ise “A kümesi B kümesinin **alt kümesidir.**” veya “B kümesi A kümesini **kapsar.**” denir.

Bir A kümesi bir B kümesinin alt kümesi ise bu “ $A \subset B$ ” biçiminde gösterilir; “**A alt küme B**” diye okunur. Bu durumda B kümesi A kümesini kapsar. Bu da “ $B \supset A$ ” biçiminde gösterilir ve “**B kapsar A**” diye okunur. A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse; bu $A \not\subset B$ ile gösterilir.

Örneğin; $M = \{1,3\}$ kümesinin her elemanı $N = \{1,2,3,4\}$ kümesinin de elemanı olup $M \subset N$, $N \supset M$ ve $N \not\subset M$ yazılabilir.

Örnek – 3.16

$A = \{1,2,3\}$ kümesinin bütün alt kümelerini yazınız.

Çözüm

Sıfır elemanlı alt küme : $\emptyset$

Bir elemanlı alt kümeler : $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

İki elemanlı alt kümeler : $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$

Üç elemanlı alt küme : $\{1,2,3\}$

Örnek – 3.17

$A = \{a,b\}$, $B = \{b,c\}$, $C = \{a,b,c,d\}$

kümeleri için,

I. $A \not\subset B$ ’dir. II. $A \subset C$ ’dir. III. $B \subset C$ ’dir.

Örnek – 3.18

$A = \{a,b\}$ kümesinin, elemanlarının ve alt kümelerinin kümesini yazınız.

Çözüm

Elemanlar a, b; alt kümeler $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$ kümeleridir.

Bunların kümesi, $K = \{a,b,\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ olur.

$s(K) = 6$ olduğunu görünüz.

Alt Kümenin Özellikleri

I. Boş küme her kümenin alt kümesidir.
($\emptyset \subset A$)

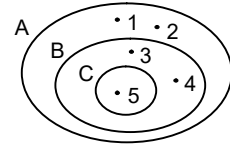
II. Her küme kendisinin alt kümesidir.
($A \subset A$)

III. $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$ dir.

IV. $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.

Örnek – 3.19

Şekildeki Venn şemasında verilen A, B, C kümeleri



$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{5\}$ olup
 $C \subset B$, $B \subset A$, $C \subset A$ ’dır.

► Bir kümenin, kendisi dışındaki alt kümelerine o kümenin **öz alt kümeleri** denir.

Örneğin;

$A = \{a,b\}$ kümesinin öz alt kümeleri $\emptyset$, $\{a\}$ ve $\{b\}$ kümeleridir.

Örnek – 3.20

$A = \{1,2,a\}$, $B = \{2,3,4,b\}$ ve $C = \{3,4,5,c,d\}$ kümelerinde a, b, c harfleri birer doğal sayıyı göstermektedir.

$A \subset B$ ve $B \subset C$ olduğuna göre; $b + c + d$ toplamı kaçtır?

Çözüm

$\{1,2,a\} \subset \{2,3,4,b\}$ olması için b sayısı kesinlikle 1 olmalıdır.

(Bu durumda a sayısı 3 veya 4 olabilir.)

$\{2,3,4,b\} \subset \{3,4,5,c,d\}$ ifadesinde $b = 1$ olduğuna göre; c ile d’den biri 1, diğeri 2 olmalıdır.

Buna göre; $b + c + d = 1 + 1 + 2 = 4$ olur.

Siz Çözünüz

1. Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulunuz.

- a. $\emptyset$ b. $\{0\}$ c. $\{\emptyset\}$
 d. $\{a,b,2\}$ e. $\{m,n,\{m,n\}\}$
 f. $\{\emptyset,\Delta,\square\}$ g. $\{a,\{b,c\},\{a,b,c\}\}$
 h. $\{\text{İrem Nur Şahin}, \text{Melek Bengü Şahin}\}$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olması için “ Δ ” ve “ $\square$ ” işaretlerinin yerine konulması gereken elemanları bulunuz.

- a. $\{a,\Delta,b\} = \{\square,k,a\}$
 b. $\{1,3,\Delta,9\} = \{3,5,\square,9\}$
 c. $\{\Delta,3,5\} = \{\{3\},5,\square\}$
 d. $\{2,4,6,\Delta\} = \{2,\square,4,6\}$

3. $A = \{2,3,a,b,c\}$ olduğuna göre; aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur ?

- a. $\{2,3,a\} \subset A$ b. $3 \in A$ c. $d \notin A$
 d. $a \subset A$ e. $\{c\} \in A$ f. $\emptyset \in A$

4. Aşağıdaki ifadelerde “ $\square$ ” işareti yerine “ $\subset$ ”, “ $\supset$ ”, “ $\subsetneq$ ” işaretlerinden uygun olanını koyunuz.

- a. $\{a,c\} \square \{a,\{b\},c\}$
 b. $\emptyset \square \{\emptyset,A,B\}$
 c. $\{2,\{3\}\} \square \{1,2,3,4\}$
 d. $\{a,b,c\} \square \{b,c,d,e\}$
 e. $\{a,\{a,b\},b,c\} \square \{a,b,\{a,b\}\}$

5. $A = \{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{c\}\}$ olduğuna göre; aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur ?

- a. $a \in A$ b. $\{a,b\} \subset A$ c. $\emptyset \in A$
 d. $\emptyset \subset A$ e. $\{c\} \subset A$ f. $\{\{a\}\} \subset A$
 g. $\{a,b,c\} \subset A$ h. $\{\emptyset,\{a,b\}\} \subset A$

6. $A = \{\emptyset,a,\{a\}\}$ kümesinin bütün alt kümelerini yazınız.

7. Aşağıdaki ifadelerin doğru olması için “ Δ ” ve “ $\square$ ” yerine konulabilecek elemanların kümelerini yazınız.

- a. $\{2,5,\Delta\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$
 b. $\{a,b,\Delta\} \subset \{b,c,d,\square\}$

8. $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{a,b,d\}$ ise $K \subset A$ ve $K \subset B$ koşuluna uyan K kümelerini yazınız.

9. $\{a,b\} \subset K \subset \{a,b,c,d,e\}$ koşuluna uyan K kümelerinden 4 tanesini yazınız.
 Kaç değişik K kümesi yazılabilir?

3.4 Kümelerle İşlemler**Birleşim İşlemi**

► İki kümenin bütün elemanlarının oluşturduğu kümeye bu kümelerin **birleşim kümesi** veya **birleşimi** denir.

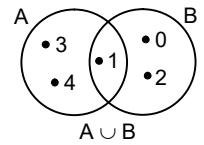
A ve B kümelerinin birleşimi “ $A \cup B$ ” biçiminde gösterilir; “**A birleşim B**” diye okunur.

Örnek – 3.21

$A = \{1,3,4\}$ ve $B = \{0,1,2\}$ olduğuna göre; $A \cup B$ kümesini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösteriniz.

Çözüm

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4\};$$

**Örnek – 3.22**

$A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{c,d,e\}$ olduğuna göre;

- a. $(A \cup K) = (B \cup K)$ ve
 b. $(A \cup P) \subset (B \cup P)$ koşullarına uyan en az elemanlı K ve P kümelerini yazınız.

Çözüm

a. $\{a,b,c\} \cup K = \{c,d,e\} \cup K$

koşulunun sağlanması için, K kümesi A ile B kümelerinin farklı elemanlarını içermelidir.

Buna göre; en az elemanlı K kümesi,
 $K = \{a,b,d,e\}$ olur.

b. $(\{a,b,c\} \cup P) \subset (\{c,d,e\} \cup P)$ koşuluna uyan P kümesi, en azından A'nın B'de olmayan elemanlarını bulundurmalıdır.

Buna göre; en az elemanlı P kümesi,
 $P = \{a,b\}$ olur.

Uyarı!

$A \cup K = B \cup K$ iken $A = B$ olması gerekmediğine; $A \cup P \subset B \cup P$ iken $A \subset B$ olması gerekmediğine dikkat ediniz.

Siz Çözünüz

$A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{c,d,e\}$ olduğuna göre;

$(B \cup T) \subset (A \cup T)$ koşulunu sağlayan en az elemanlı T kümesini yazınız.

Kesişim İşlemi

➤ İki kümenin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye bu kümelerin **kesişim kümesi** veya **kesişimi** denir.

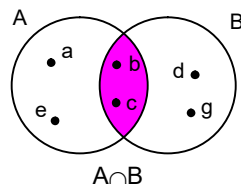
A ve B kümelerinin kesişimi " $A \cap B$ " biçiminde gösterilir; "**A kesişim B**" diye okunur.

Örnek – 3.23

$A = \{a,b,c,e\}$ ve $B = \{b,c,d,g\}$ olduğuna göre, $A \cap B$ kümesini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösteriniz.

Çözüm

$A \cap B = \{b,c\};$

**Örnek – 3.24**

$A = \{2,3,5\}$, $B = \{2,5,6\}$ kümeleri veriliyor.

a. $E \subset (A \cup B)$ olmak üzere; $(A \cap E) = (B \cap E)$ eşitliğini sağlayan E kümelerini bulunuz.

b. $F \subset (A \cup B)$ olmak üzere; $(A \cap F) \subset (B \cap F)$ koşulunu sağlayan F kümelerini bulunuz.

Çözüm

a. $A \cup B = \{2,3,5,6\}$ 'dir.

E kümesinin elemanları, hem A'nın hem B'nin elemanı olmalıdır. E kümesi boş küme de olabilir. Öyleyse; E kümesi $\{2,5\}$ kümesinin alt kümelerinden biri olabilir.

E yerine; $\emptyset$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{2,5\}$ kümelerinden biri konulabilir.

b. F kümesi, $B = \{2,5,6\}$ kümesinin herhangi bir alt kümesi olabilir.

F kümelerini, siz yazınız.

Siz Çözünüz

$A = \{1,2,5\}$, $B = \{2,3,4\}$ ve $C = \{1,3,6\}$ kümeleri veriliyor.

a. $E \subset C$ olduğuna göre; $(A \cap E) = (B \cap E)$ eşitliğini sağlayan E kümelerini bulunuz.

b. $F \subset C$ olduğuna göre; $(A \cap F) \subset (B \cap F)$ koşulunu sağlayan F kümelerini bulunuz.

Ayrık Kümeler

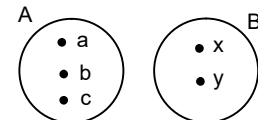
➤ Ortak elemanı olmayan kümelere **ayrık kümeler** denir.

Örneğin;

$A = \{a,b,c\}$ ve

$B = \{x,y\}$ kümeleri

ayrık kümelerdir.



Bu kümeler için,

$A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = \{a,b,c,x,y\}$ olur.

Birleşim ve Kesişim İşlemlerinin Özellikleri

I. Tek kuvvet özeliği

Birleşim ve kesişim işlemlerinin **tek kuvvet özeliği** vardır.

$$A \cup A = A \text{ ve } A \cap A = A \text{ 'dır.}$$

Örneğin; $\{2,4\} \cup \{2,4\} = \{2,4\}$ ve

$$\{2,4\} \cap \{2,4\} = \{2,4\} \text{ olur.}$$

II. Değişme özeliği

Birleşim ve kesişim işlemlerinin **değişme özeliği** vardır.

$$A \cup B = B \cup A \text{ ve } A \cap B = B \cap A \text{ 'dır.}$$

Örneğin;

$$\{2,4\} \cup \{3,4\} = \{2,3,4\} \text{ ve}$$

$$\{3,4\} \cup \{2,4\} = \{2,3,4\} \text{ 'dır.}$$

$$\{2,4\} \cap \{3,4\} = \{3,4\} \cap \{2,4\} \text{ olduğu görülür.}$$

Aynı örneği kesişim işlemi için de verebiliriz:

$$\{2,4\} \cap \{3,4\} = \{4\} \text{ ve } \{3,4\} \cap \{2,4\} = \{4\} \text{ 'dır.}$$

$$\{2,4\} \cap \{3,4\} = \{3,4\} \cap \{2,4\} \text{ olduğu görülür.}$$

III. Birleşme özeliği

Birleşim ve kesişim işlemlerinin **birleşme özeliği** vardır.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \text{ ve}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \text{ 'dır.}$$

Ardışık **birleşim** ve **kesişim** işlemlerinde parantez kullanmak gerekmez. İstenilen işlem önce yapılabilir.

Örneğin;

$$(\{1,2\} \cup \{2,3\}) \cup \{2,4\} = \{1,2,3\} \cup \{2,4\}$$

$$= \{1,2,3,4\} \text{ ve}$$

$$\{1,2\} \cup (\{2,3\} \cup \{2,4\}) = \{1,2\} \cup \{2,3,4\}$$

$$= \{1,2,3,4\} \text{ olur.}$$

$$(\{1,2\} \cup \{2,3\}) \cap \{2,4\} = \{1,2\} \cap (\{2,3\} \cup \{2,4\})$$

olduğu görülür.

İşlem sırası, sonucu değiştirmez.

Aynı örneği kesişim işlemi için de verebiliriz:

$$(\{1,2\} \cap \{2,3\}) \cap \{2,4\} = \{2\} \cap \{2,4\} = \{2\} \text{ ve}$$

$$\{1,2\} \cap (\{2,3\} \cap \{2,4\}) = \{1,2\} \cap \{2\} = \{2\} \text{ olur.}$$

$$(\{1,2\} \cap \{2,3\}) \cap \{2,4\} = \{1,2\} \cap (\{2,3\} \cap \{2,4\})$$

olduğu görülür.

IV. Her A kümesi için,

$$A \cup \emptyset = A \text{ ve } A \cap \emptyset = \emptyset \text{ 'dır.}$$

V. $A \subset B$ ise $A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$ 'dır.

Örneğin; $A = \{1,3\}$ ve $B = \{1,2,3\}$ kümeleri için, $A \subset B$ 'dir.

$$\{1,3\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\} \text{ ve}$$

$$\{1,3\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\} \text{ olur.}$$

$$A \cup B = B \text{ ve } A \cap B = A \text{ olduğu görülür.}$$

VI. Her A ve B kümesi için,

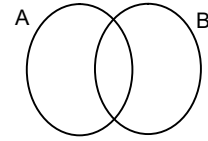
$$(A \cap B) \subset A ;$$

$$(A \cap B) \subset B ;$$

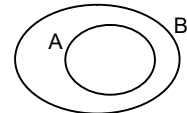
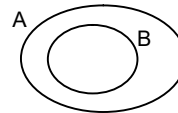
$$(A \cap B) \subset (A \cup B) ;$$

$$A \subset (A \cup B) ;$$

$$B \subset (A \cup B) \text{ 'dır.}$$



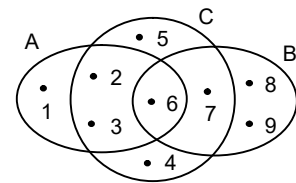
Verdiğimiz özellikleri Venn Şemaları üzerinde doğrulayınız.



Siz Çöünüz

A, B, C kümeleri

Venn şemasında verilmiştir.



Buna göre;

aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

a. A b. B c. C d. $A \cap B$

e. $A \cap C$ f. $B \cap C$ g. $A \cup B$ h. $A \cup C$

i. $B \cup C$ j. $A \cup B \cup C$ k. $A \cap B \cap C$

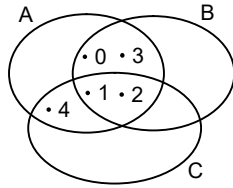
Örnek – 3.25

$A \cap B = \{0,1,2,3\}$ ve $A \cap C = \{1,2,4\}$ olduğuna göre;

- verilenleri Venn Şemasında gösteriniz.
- en az elemanlı A kümesini yazınız.
- en az elemanlı $B \cap C$ kümesini yazınız.
- en az elemanlı $B \cup C$ kümesini yazınız.

Çözüm

a.



b. A kümesinin B’de bulunan elemanları 0, 1, 2, 3 ve C’de bulunan elemanları 1, 2, 4’tür. Buna göre; 0, 1, 2, 3, 4 elemanları A kümesinde bulunduğunu bildiğimiz elemanlardır.

En az elemanlı A kümesi $\{0,1,2,3,4\}$ olur.

A kümesinin B’de ve C’de bulunmayan başka elemanları da bulunabilir.

c. Verilenlerden, B’de 4’ün bulunmadığı; C’de 0 ve 3’ün bulunmadığı anlaşılmaktadır. 1 ve 2, hem B’de hem C’de bulunur.

En az elemanlı $B \cap C$ kümesi $\{1,2\}$ olur.

B ile C’nin, A kümesinde bulunmayan, başka ortak elemanları da bulunabilir.

d. En az elemanlı $B \cup C$ kümesinin $\{0,1,2,3,4\}$ olduğunu görünüz.

Siz Çözünüz

1. $A \cap B = \{a,b,c,d,e\}$ ve $B \cap C = \{c,d,e,f\}$ olduğuna göre;

- verilenleri Venn Şemasında gösteriniz.
- en az elemanlı B kümesini yazınız.
- en az elemanlı $A \cap C$ kümesini yazınız.

2. $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{c,d,e,f\}$ ve $C = \{d,e,f,g\}$ kümelerini Venn şemasında gösteriniz.

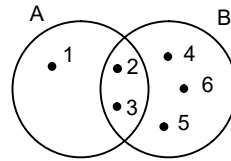
Birleşim Kümesinin Eleman Sayısı

Bir örnek üzerinde çalışalım:

$A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{2,3,4,5,6\}$ olsun.

$A \cup B$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Kümeleri Venn Şemasında gösterelim:



$s(A \cup B)$ ’yi bulmak amacıyla, $s(A) + s(B)$ toplamı yazılırsa; $s(A \cap B)$ değeri hem $s(A)$ ’nin içinde hem de $s(B)$ ’nin içinde olmak üzere iki kere kaydedilmiş olur.

Bunların birini toplamdan çıkarmak gerekir.

Buna göre;

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ olur.}$$

$$s(A \cup B) = 3 + 5 - 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

Uyarı!

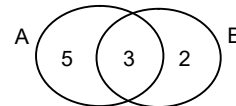
Siz problem çözümlerinizde, elde edilmiş formüllerden daha çok, küme işlemlerinin özelliklerini ve Venn Şemasını kullanmayı seçiniz.

Örnek – 3.26

A ve B kümeleri için; $s(A) = 8$, $s(B) = 5$ ve $s(A \cap B) = 3$ ise $s(A \cup B)$ kaçtır?

Çözüm

1. yol



$s(A \cap B) = 3$ olduğuna göre; A’nın B dışındaki kısmının eleman sayısı $8 - 3 = 5$ olur.

$$s(A \cup B) = 5 + s(B) = 10 \text{ bulunur.}$$

(Şemadaki sayıların “eleman” değil, “eleman sayısı” olduğuna dikkat ediniz.)

2. yol

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ 'dir.

$s(A \cup B) = 8 + 5 - 3 = 10$ bulunur.

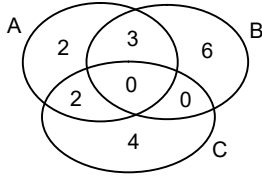
Örnek – 3.27

A ve B kümeleri için; $s(A) = 7$, $s(B) = 9$,
 $s(C) = 6$, $s(A \cap B) = 3$, $s(A \cap C) = 2$ ve
 $s(B \cap C) = 0$ ise $s(A \cup B \cup C)$ kaçtır?

Çözüm

$s(B \cap C) = 0$ ise $s(A \cap B \cap C) = 0$ 'dır.

Verilen bilgileri Venn Şemasına taşıyalım:



$s(A \cup B \cup C) = 2 + 3 + 2 + 6 + 4 = 17$ bulunur.

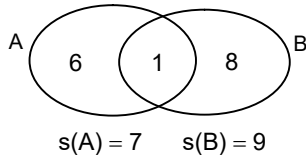
Örnek – 3.28

A ve B kümeleri için $A \cap B \neq \emptyset$, $s(A) = 7$ ve
 $s(B) = 9$ olduğuna göre; $s(A \cup B)$ değeri en
fazla kaç olabilir?

Çözüm

$A \cap B$ 'nin eleman sayısı azaldıkça, A'nın
dışındaki eleman sayısı artar ve $s(A \cup B)$
değeri büyür. Öyleyse; $s(A \cap B)$ değeri ne kadar
küçük seçilirse, $s(A \cup B)$ değeri o kadar büyük
olacaktır.

$A \cap B \neq \emptyset$ olduğundan, $s(A \cap B)$ değeri en az
1 olabilir.



En büyük $s(A \cup B)$ değeri, $s(A \cup B) = 15$ olur.

Örnek – 3.29

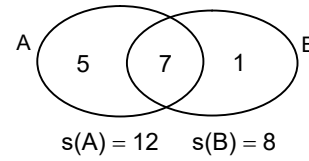
A ve B kümeleri için $B \not\subset A$, $s(A) = 12$ ve
 $s(B) = 8$ olduğuna göre; $s(A \cup B)$ değeri en az
kaç olabilir?

Çözüm

$B \subset A$ olsaydı,

$A \cup B = A$ ve $s(A \cup B) = s(A) = 12$ olacaktı.

$B \not\subset A$ olduğundan, B kümesinin A dışında en
az 1 elemanı bulunmalıdır.

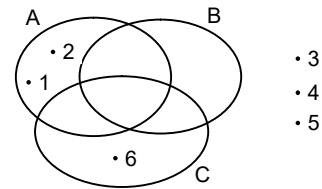


$s(A \cup B)$ değeri, en az, $s(A \cup B) = 13$ olabilir.

Örnek – 3.30

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\}$
olduğuna göre; en az elemanlı A kümesini
yazınız.

Çözüm



$B \cup C$ kümesinde olmayan 1 ve 2 elemanları, A
kümesinin elemanları olmalıdır.

Buna göre; en az elemanlı A kümesi, $A = \{1, 2\}$
kümesi olur.

Venn Şemasının yanına koyduğumuz 3, 4, 5
elemanlarının biri ya da daha fazlası A'nın
elemanı olabilir.

Aynı düşüncelerle; en az elemanlı C kümesinin
 $C = \{6\}$ olduğunu, en çok elemanlı C kümesi-
nin de $C = \{3, 4, 5, 6\}$ olabileceğini söyleyebiliriz.

Siz Çözünüz

1. $A = \{2,3,6\}$, $B = \{3,4,5\}$ ve $C = \{3,6,7\}$ kümelerini birlikte Venn Şeması ile gösteriniz.
2. A ve B kümeleri için; $s(A) = 8$, $s(B) = 7$ ve $s(A \cap B) = 3$ ise $s(A \cup B)$ kaçtır?
3. A ve B kümeleri için $A \cap B \neq \emptyset$, $s(A) = 9$ ve $s(B) = 6$ olduğuna göre;
 $s(A \cup B)$ 'nin alabileceği değerleri bulunuz.
4. A ve B kümeleri için $A \not\subset B$, $s(A) = 7$ ve $s(B) = 10$ olduğuna göre;
a. $s(A \cup B)$ 'nin alabileceği değerleri bulunuz.
b. $s(A \cap B)$ 'nin alabileceği değerleri bulunuz.
5. $A = \{a,b,c,d\}$ kümesinin,
a. a'yı bulunduran alt kümelerini bulunuz.
b. a'yı bulunduran ve b'yi bulundurmeyen alt kümelerini bulunuz.
6. $A = \{1,2,3,4\}$ kümesinin,
a. 1 ve 2'yi bulunduran alt kümelerini bulunuz.
b. 3'ü bulunduran ve 4'ü bulundurmeyen alt kümelerini bulunuz.
c. 1 ve 3'ü bulundurmeyen alt kümelerini bulunuz.
7. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinin en az dört elemanlı alt kümeleri kaç tanedir?
8. $A = \{a,b,c,d,e\}$ ve $B = \{a,c,e,m,n\}$ olduğuna göre, hem A'nın hem de B'nin alt kümesi olan kaç değişik küme bulunur?
9. Biri diğerinin alt kümesi olmayan öyle A ve B kümeleri bulunuz ki; $A \cup B = \{1,2,4,6,8\}$ ve $A \cap B = \{2,8\}$ olsun.

3.5 Kümelerle Problemler

Küme kavramı, Matematikteki her kavram gibi, gerçek yaşam problemlerinin bir çoğunun çözümünde çözüm yolları açar; kolaylıklar sağlar.

Örnek – 3.31

32 kişilik bir sınıfta öğrencilerden her biri resim ve müzik kurslarından en az birine katılmaktadır.

Yalnız resim kursuna 18 kişi, hem resim hem müzik kursuna 6 kişi katılmaktadır.

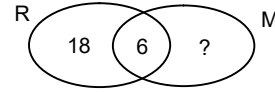
Buna göre; yalnız müzik kursuna katılan öğrenci sayısı kaçtır?

Çözüm

Resim kursuna katılan öğrencilerin kümesi R, müzik kursuna katılan öğrencilerin kümesi M olsun.

Kümeleri Venn şeması ile gösterelim.

Verilen sayıları ilgili kümelere yazalım:



18 öğrenci yalnız resim kursuna, 6 öğrenci hem müzik hem resim kursuna katılmaktadır.

Resim kursuna katılan toplam öğrenci sayısı, $s(R) = 18 + 6 = 24$ olur. 32 öğrencinin 24'ü resim kursuna; kalan $32 - 24 = 8$ öğrenci yalnız müzik kursuna katılır.

Örnek – 3.32

23 kişilik bir turist grubu, A ve B dillerinden en az birini bilenlerden oluşmaktadır.

Grupta, A dilini bilen 17 kişi, B dilini bilen 13 kişi bulunmaktadır.

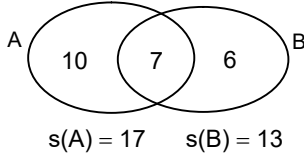
Bu turist grubunda hem A hem B dilini bilen kaç kişi bulunur?

Çözüm

A dilini bilenlerin kümesi A, B dilini bilenlerin kümesi B olsun.

Kümeleri Venn şeması ile gösterelim.

Verilen sayıları ilgili kümelere yazalım:



Grup 23 kişi, A dilini bilen 17 kişi olduğuna göre; $23 - 17 = 6$ kişi yalnız B dilini bilir.

B dilini bilenler 13 kişi olduğuna göre; bunların $13 - 6 = 7$ 'si hem A hem B dilini bilir.

Örnek – 3.33

Bir sınıftaki öğrencilerin her biri müzik ve tiyatro kollarından en az birinde görev almıştır.

Müzik kolunda görevli öğrencilerin sayısı 16, tiyatro kolunda görevli öğrencilerin sayısı 13'tür.

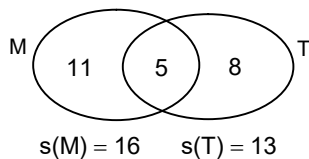
Her iki kolda da görevli olan öğrenci sayısı 5 olduğuna göre; sınıfın öğrenci sayısı kaçtır?

Çözüm

Müzik kolunda görevli olan öğrencilerin kümesi M, tiyatro kolunda görevli olan öğrencilerin kümesi T olsun.

Venn şeması çözümü kolaylaştırır.

Verilen sayıları ilgili kümelere yazalım:



Tiyatro kolundaki 13 kişiden 5'i Müzik kolunda da görevlidir. Buna göre; yalnız Tiyatro kolunda görevli olan öğrenci sayısı, $13 - 5 = 8$ olur. Bu sayıya Müzik kolundaki tüm öğrencilerin sayısı eklenirse, sınıfın öğrenci sayısı bulunur.

Sınıfın öğrenci sayısı, $8 + 16 = 24$ bulunur.

Örnek – 3.34

Bir sınıfın öğrencilerinden 10'u İngilizce ve Almanca dillerinden hiçbirini bilmemektedir.

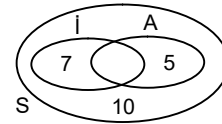
Bu dillerden en çok birini bilenler 22 kişidir.

Yalnız İngilizce bilen öğrenci sayısı 7 ise; yalnız Almanca bilen öğrenci sayısı kaçtır?

Çözüm

Sınıfın öğrencilerinin kümesi S, İngilizce bilenlerin kümesi İ, Almanca bilenlerin kümesi A olsun.

Bu dillerden en çok birini bilenler; bu dillerin hiçbirini bilmeyenlerle, yalnız birini bilenlerden oluşur. O halde; bu dillerden yalnız birini bilenlerin sayısı $22 - 10 = 12$ 'dir.



Yalnız İngilizce bilenlerin sayısı 7 ise; yalnız Almanca bilenlerin sayısı $12 - 7 = 5$ olur.

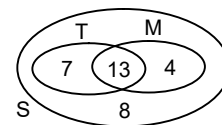
Örnek – 3.35

32 kişilik bir sınıfta Türkçeden geçenlerin sayısı 20, Matematikten kalanların sayısı 15'tir.

Bu derslerin en çok birinden geçenlerin sayısı 19 olduğuna göre, ikisinden de kalanların sayısı kaçtır?

Çözüm

Sınıfın öğrencilerinin kümesi S, Türkçeden geçenlerin kümesi T, Matematikten geçenlerin kümesi M olsun.



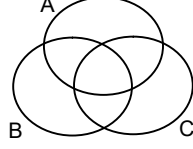
Matematikten kalanların sayısı 15 ise; Matematikten geçenlerin sayısı $32 - 15 = 17$ 'dir. En çok birinden geçenlerin sayısı 19 ise; ikisinden de geçenlerin sayısı, $32 - 19 = 13$ olur.

Şema ile, iki dersten de kalanların sayısının 8 olduğunu görünüz.

Örnek – 3.36

Bir öğrenci grubu A, B ve C dillerinden en az birini bilenlerden oluşmaktadır.

Bu dilleri bilenlerin oluşturdukları A, B ve C kümeleri Venn şemasında gösterilmiştir.

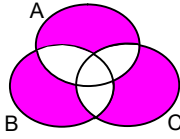


Buna göre; bu dillerden,

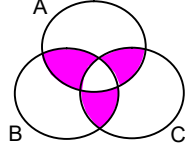
- yalnız birini bilenlerin kümesini
- yalnız ikisini bilenlerin kümesini
- en az ikisini bilenlerin kümesini
- en çok ikisini bilenlerin kümesini
- üçünü de bilenlerin kümesini Venn şemasında gösteriniz.

Çözüm

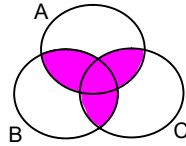
a.



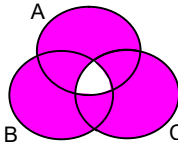
b.



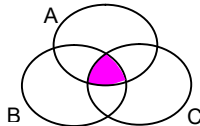
- c. “En az ikisini bilenler” ifadesi, “ikisini veya daha fazlasını bilenler” anlamına gelir.



- d. “En çok ikisini bilenler” ifadesi, “birini veya ikisini bilenler” anlamına gelir.



e.



$$A \cap B \cap C$$

Örnek – 3.37

Bir sınıfta İngilizce bilen öğrenci sayısı Almanca bilen öğrenci sayısından 7 fazladır.

İngilizce bilmeyen öğrenci sayısı 12 olduğuna göre; Almanca bilmeyen öğrenci sayısı kaçtır?

Çözüm

Sınıftaki İngilizce bilen öğrenci sayısı Almanca bilen öğrenci sayısından 7 fazla ise; Almanca bilmeyen öğrenci sayısı da İngilizce bilmeyen öğrenci sayısından 7 fazladır.

Öyleyse; Almanca bilmeyen öğrenci sayısı $12 + 7 = 19$ olur.

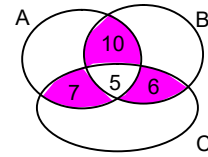
Örnek – 3.38

Bir sınıfın bütün öğrencileri A, B, C derslerinin en az birinden kalmıştır.

A ve B derslerinden kalan öğrenci sayısı 15, A ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 12, B ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 11 ve her üç dersten de kalan öğrenci sayısı 5 olduğuna göre, bu üç dersin yalnız ikisinden kalan öğrenci sayısı kaçtır?

Çözüm

A, B, C derslerinden kalan öğrencilerin kümeleri de A, B, C olsun.



Venn şemasını çizerek, önce $s(A \cap B \cap C) = 5$ değerini ait olduğu kümeye yazınız.

Sonra da; $s(A \cap B) = 15$, $s(A \cap C) = 12$ ve

$s(B \cap C) = 11$ değerlerinden yararlanarak

yalnız iki dersten kalan öğrencilerin kümesinin alt kümelerinin eleman sayılarını yazınız.

Şekildeki taralı bölge, yalnız iki dersten kalanların kümesine karşılık gelir. Bu kümenin eleman sayısı $10 + 7 + 6 = 23$ olarak bulunur.

Örnek – 3.39

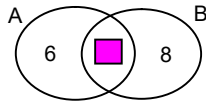
Bir grupta yalnız A dilini bilenlerin sayısı 6, yalnız B dilini bilenlerin sayısı 8'dir.

Grubun üyelerinin sayısı, hem A hem B dillerini bilenlerin sayısının 3 katı olduğuna göre, bu grupta kaç kişi vardır ?

Çözüm

A dilini bilenlerin kümesi A, B dilini bilenlerin kümesi B olsun.

$s(A \cap B)$ sayısını  sembolü ile gösterelim.

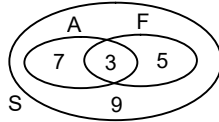


$$s(A \cap B) \rightarrow \text{pink square}$$

$$s(A \cup B) \rightarrow 3 \cdot \text{pink square}$$

$$2 \cdot s(A \cap B) = 6 + 8 \text{ olduğu görülür.}$$

$$s(A \cap B) = 7 \text{ ve } s(A \cup B) = 21 \text{ bulunur.}$$

Örnek – 3.40

Bir sınıftaki öğrencilerin kümesi S; bu öğrencilerden Almanca bilenlerin kümesi A; Fransızca bilenlerin kümesi F'dir.

Venn şemasında ayrı bölgelelerdeki sayılar bu bölgelere karşılık gelen kümelerin eleman sayısını göstermektedir.

Buna göre;

- En az bir dil bilenlerin sayısını bulunuz.
- En çok iki dil bilenlerin sayısını bulunuz.
- En çok bir dil bilenlerin sayısını bulunuz.
- Yalnız bir dil bilenlerin sayısını bulunuz.
- İki dili de bilenlerin sayısını bulunuz.
- Bu dilleri bilmeyenlerin sayısını bulunuz.

Çözüm

a. En az bir dil bilenler, yalnız bir dil bilenlerle iki dili de bilenlerden oluşur.

$$\text{Bunların sayısı, } 7 + 3 + 5 = 15 \text{ 'tir.}$$

b. Bu dillerden en çok ikisini bilenler; hiçbirini bilmeyenler ile yalnız birini bilenler ve ikisini de bilenlerden oluşur.

$$\text{Bunların sayısı, } 7 + 3 + 5 + 9 = 24 \text{ 'tür.}$$

c. Bu dillerden en çok birini bilenler, hiçbirini bilmeyenler ile yalnız birini bilenlerden oluşur.

$$\text{Bunların sayısı, } 9 + 7 + 5 = 21 \text{ 'dir.}$$

d. Yalnız bir dil bilenlerin sayısı, $7 + 5 = 12$ 'dir.

e. İki dili de bilenlerin sayısı 3'tür.

f. Bu iki dili de bilmeyenlerin sayısı 9'dur.

Siz Çözüünüz

1. Hasta ziyaretine giden 12 kişilik bir grupta herkesin elinde çiçek vardır.

Bunlardan 9'unda gül, 7'sinde karanfil bulunduğu göre; kaçında hem gül hem de karanfil bulunur.

2. Bir gazete dağıtıcısı A ve B gazetelerinden 32 tanesini 23 kişiye satmıştır.

Okurlar aynı gazeteden en çok bir tane aldıklarına göre; kaç yalnız bir gazete almıştır?

3. 30 kişilik sınıfta; resim kursuna gidenlerin sayısı 13, müzik kursuna gidenlerin sayısı 16, bu iki kursa da gidenlerin sayısı 8'dir.

Buna göre; bu kurslardan hiçbirine gitmeyen öğrenci sayısı kaçtır?

4. Bir sınıftaki öğrencilerden 17'si Matematik veya Türkçe derslerinden kalmıştır.

Matematikten kalan öğrenci sayısı, Türkçeden kalan öğrenci sayısından 3 fazladır.

Öğrencilerin 4'ü hem Türkçe hem Matematikten kaldığına göre; yalnız Matematikten kalan öğrenci sayısı kaçtır?

Test – 3.1

1. $A = \{a, b, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ kümesinin kaç elemanı vardır?

A) 9 B) 7 C) 6 D) 4

2. $A = \{\emptyset, a, b\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\emptyset \in A$ B) $\emptyset \subset A$
C) $\{\emptyset\} \subset A$ D) $\{a, b\} \in A$

3. A ve B kümeleri için $s(A) = 8$, $s(B) = 13$ ve $s(A \cup B) = 15$ ise; $s(A \cap B)$ kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8

4. A ve B kümeleri birbirinin alt kümesi değildir. B kümesinin A kümesinde bulunmayan 5 elemanı vardır.

$s(A) = 6$ olduğuna göre; $s(B)$ en fazla kaç olabilir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 6

5. A kümesinin B kümesinde bulunmayan 7 elemanı, B kümesinin A kümesinde bulunmayan 10 elemanı vardır.

$s(A) + s(B) = 23$ ise; $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23

6. $B \not\subset A$, $C \not\subset A$, $A \cap B = \{0, 12\}$ ve $A \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğuna göre; $B \cup C$ kümesi en az kaç elemanlı olabilir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5

7. A ve B kümeleri için $A = \{a, b\}$, $A \cap B \neq \emptyset$ ve $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ olduğuna göre;

B kümesi en az kaç elemanlıdır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

8. A, B, C kümeleri için, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\}$ 'dir.

Bu koşullara uyan kaç değişik C kümesi yazılabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

9. A ve B kümeleri için, $s(A) = s(B)$ 'dir.

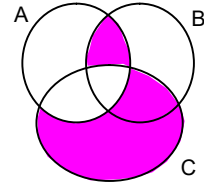
$s(A \cup B) = 90$, $s(A \cap B) = 60$ ise; $s(A)$ kaçtır?

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80

10. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ve
 $A \cap B = \{2, 3, 4\}$

olduğuna göre; şemadaki boyalı bölge ile belirtilen küme kaç elemanlıdır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6



11. $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

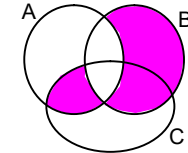
$B = \{3, 4, 5, 6\}$ ve

$C = \{2, 4, 6, 8\}$

olduğuna göre;

şemadaki boyalı bölge ile belirtilen küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2, 5\}$ B) $\{2, 3, 5\}$
C) $\{2, 5, 6\}$ D) $\{2, 3, 5, 6\}$



3. Bölüm

Kümeler

- 12.** Bir grupta İngilizce bilenler 12 kişi, İngilizce bilmeyenler 10 kişidir.

Bu grupta Almanca bilenler 9 kişi ise; Almanca bilmeyenler kaç kişidir?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10

- 13.** 80 evden oluşan bir köyün her evinde televizyon veya telefon bulunmaktadır.

45 evde televizyon, 50 evde telefon bulunduğu göre; kaç evde yalnız telefon bulunur?

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45

- 14.** Şemada T, M ve İ

harfleri sırasıyla

bir sınıftaki Türkçe,

Matematik ve İngilizce

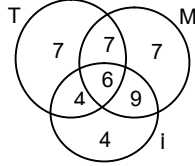
derslerinden geçen

öğrencilerin kümelerini göstermektedir.

Sayılar, içinde bulundukları kapalı bölgeye karşılık gelen kümelerin eleman sayılarıdır.

Buna göre;

aşağıdakilerden hangisi doğrudur?



(2000-LGS)

- A) Bu derslerin en az ikisinden geçenlerin sayısı 26'dır.
B) Türkçe ve Matematikten kalanların sayısı 23'tür.
C) Matematikten geçenlerin sayısı 21'dir.
D) Bu derslerin sadece birinden geçenlerin sayısı 40'tır.

- 15.** Bir apartmanda A gazetesini alan her aile B gazetesini de almaktadır.

Yalnız B gazetesini alan aile sayısı 24 tür.

Apartmanda satılan B gazetesi sayısı A gazetesi sayısının 3 katı olduğuna göre, A gazetesini alan aile sayısı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12

- 16.** Bir sınıftaki 32 öğrenciden 18'inin bisikleti, 17'sinin bilgisayarı vardır.

Bu sınıfta, yalnız bisikleti olan en çok kaç öğrenci olabilir?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18

- 17.** A, B ve C dillerinden en az birini bilenlerden oluşan bir grupta, A dilini bilenlerin her biri B dilini de bilmekte; C dilini bilmemektedir.

A dilini bilenlerin sayısı 8, B dilini bilenlerin sayısı 13, C dilini bilenlerin sayısı 11, B ve C dillerinden ikisini de bilenlerin sayısı 4'tür.

Buna göre, grup kaç kişidir?

A) 20 B) 23 C) 25 D) 28

- 18.** $\{1,2\} \subset K \subset \{0,1,2,3\}$ koşuluna uyan kaç değişik K kümesi yazılabilir?

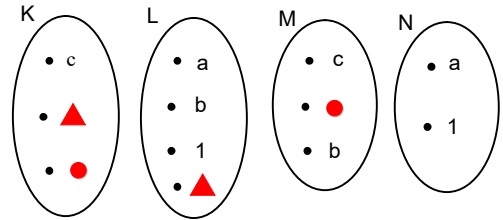
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

- 19.** $A \cup C = \{a,b,c,d\}$ ve $B \cup C = \{c,d,e,f\}$ ise; C kümesinin en fazla kaç elemanı vardır?

(1991-FL)

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4

- 20.**



Şema ile gösterilen kümelerde aşağıda verilen taşıma işlemlerinden hangisi yapılırsa $K = M$ ve $L = N$ olur?

(1999-LGS)

- A) K'daki ●, N'ye; L'deki b, K'ya
B) L'deki ▲, M'ye; M'deki b, N'ye
C) M'deki b, K'ya; L'deki 1, N'ye
D) L'deki a, M'ye; M'deki ●, N'ye

Test – 3.2

1. $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \emptyset\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- ① $a \in A$ ⑤ $\emptyset \subset A$
 ② $\{a\} \in A$ ⑥ $\{b\} \not\subset A$
 ③ $\{a\} \subset A$ ⑦ $\{\emptyset\} \subset A$
 ④ $\emptyset \in A$ ⑧ $s(A) = 5$

A) 5 B) 6 C) 3 D) 4

2. $A = \{a, \{b\}, c, \{a, c\}\}$ olduğuna göre; aşağıdakilerden hangisi A kümesinin bir alt kümesi değildir?

A) $\{a\}$ B) $\{b\}$ C) $\{c\}$ D) $\{a, c\}$

3. X ve Y kümeleri için $s(X \cup Y) = s(Y)$ ise; aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(1982-FL)

- A) $s(X) = s(X \cup Y)$ B) $s(X) = s(Y)$
 C) $s(X) = s(X \cap Y)$ D) $s(X \cap Y) = 0$

4. A, B, C, D kümeleri

$A = \{\text{Onluk sayma düzenindeki rakamlar}\},$

$B = \{286426 \text{ sayısının rakamları}\},$

$C = \{\text{Doğal sayılar}\},$

$D = \{2468 \text{ sayısının rakamları}\}$

olarak verilmiştir.

Buna göre; aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

- I. $D \subset B \subset A \subset C$ II. $A = B$
 III. $s(B) = s(D)$ IV. $B \subset D$
 A) I ve II B) II ve III
 C) I, II ve III D) I, III ve IV

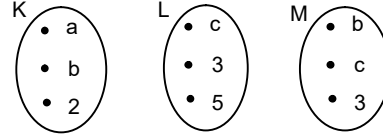
5. $A \cap B = \{a, b, c\}$ ve $A \cap C = \{a, c, d\}$ ise; A kümesi en az kaç elemanlı olabilir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

6. A ve B kümeleri için $A \not\subset B$, $s(A) = 4$ ve $s(B) = 7$ ise; $s(A \cup B)$ en az kaç olabilir?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11

- 7.



Şemalarda gösterilen K, L, M kümelerindeki a, b, c harflerinin yerine aşağıdaki hangi rakamlar yazılırsa $K = L = M$ olur?

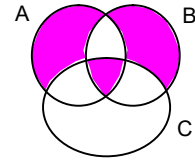
(2000-ÖÖ)

	a	b	c
A)	5	3	2
B)	3	2	5
C)	3	5	2
D)	5	2	3

8. $A = \{a, b, c\},$

$B = \{b, c, d, e\}$ ve

$C = \{c, d, f, g\}$



olduğuna göre;

şekildeki taralı bölge ile belirtilen küme kaç elemanlıdır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

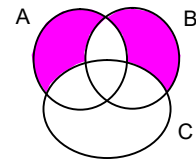
9. $A \cup C = \{1, 3, 5, 7\}$ ve

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$

olduğuna göre;

şemadaki boyalı bölge

ile belirtilen küme kaç elemanlıdır?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

10. $A = \{1, 2, 3\}$,

$B = \{2, 3, 4, 5\}$ ve

$C = \{3, 4, 6, 7\}$

olduğuna göre;

şekildeki taralı bölge ile belirtilen küme kaç elemanlıdır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

11. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{c, d\}$ olduğuna göre, $(A \cap K) \subset (B \cap K)$ ve $(A \cap K) \neq (B \cap K)$ koşulunu sağlayan K kümesi en az kaç elemanlı olabilir?

- A) 0 B) 3 C) 2 D) 1

12. A kümesinin B kümesinde bulunmayan 3 elemanı, B kümesinin A kümesinde bulunmayan 5 elemanı vardır.

$s(A \cup B) = 3 \cdot s(A \cap B)$ olduğuna göre;

$s(A \cup B)$ kaçtır?

- A) 9 B) 12 C) 15 D) 18

13. Fransızca ve Almanca dillerinden en az birini bilen 24 kişilik bir grubun 16'sı Fransızca, 14'ü Almanca bilmektedir.

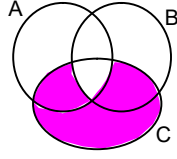
Bu grupta, yalnız bir dil bilen kaç kişi vardır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18

14. Bir sınıftaki 24 öğrencinin herbiri müzik ve resim kurslarından en az birine katılmaktadır. Her iki kursa da katılanların sayısı 6'dır.

Müzik kursuna katılanların sayısı, resim kursuna katılanların sayısından 2 fazla olduğuna göre; yalnız resim kursuna katılanların sayısı kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12



15. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğuna göre; B kümesinin A kümesini kapsayan alt kümelerinden kaç tanesinin bir elemanı 4'tür?

- A) 8 B) 4 C) 2 D) 1

16. A ile B kümesi birbirinin alt kümesi değildir.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $A \cap B = \{2, 4, 5, 6\}$

olduğuna göre; $s(A)$ en çok kaç olabilir?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

17. A ve B kümeleri için $A \not\subset B$, $s(A) = 6$ ve $s(B) = 9$ olduğuna göre; $s(A \cup B)$ kaç değişik değer alabilir?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

18. Bir grupta İngilizce bilen 7 kişi, Almanca bilen 12 kişi, bu iki dili de bilen 6 kişi bulunmaktadır.

Buna göre; bu grup en az kaç kişidir?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16

19. 30 kişilik bir sınıfta 11 öğrenci gitar, 21 öğrenci flüt çalabilmektedir.

7 öğrenci bunlardan hiçbirini çalamadığına göre; yalnız gitar çalabilenler kaç kişidir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

20. 15 kişilik bir öğrenci grubunda 8 kişi gitar kursuna, 6 kişi piyano kursuna, 7 kişi org kursuna katılmaktadır.

Hem gitar hem piyano kursuna ve hem piyano hem org kursuna katılan yoktur.

Buna göre; yalnız org kursuna katılan öğrenci sayısı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4