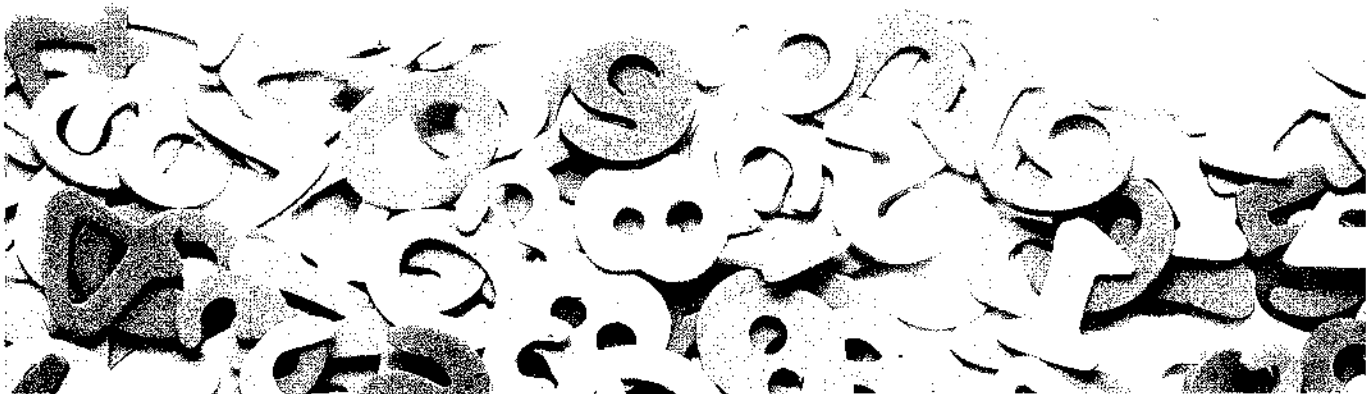


3. BÖLÜM

LİNEER CEBİR



1- Matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Şeklindeki ifadelerle $m \times n$ tipinde matris denir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde de gösterilir.

a) Matris Çeşitleri

Satır matris

Sadece tek satırdan oluşan matristir.

$A = [2 \ 3 \ 1]$, $B = [-1 \ 2]$ örnek olarak verilebilirler.

Sütun matris

Sadece tek sütundan oluşan matristir.

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ örnek olarak verilebilirler.

Kare matris

Satır ve sütun sayıları eşit matrislerdir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & -9 & 8 \end{bmatrix}$

örnek olarak verilebilirler.

Sıfır matrisi

Tüm elemanları sıfır olan matristir.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ örnek olarak verilebilirler.

Simetrik Matris

Ana köşegene göre elemanları simetrik olan matristir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ örnek olarak verilebilirler.

Ters Simetrik Matris

Ana köşegen elemanları sıfır olan ve ana köşegene göre elemanları birbirlerinin ters işaretlisi olan matrislerdir. (Karesel matrislerdir).

$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ örnek olarak verilebilirler.

Köşegen Matris

Ana köşegen elemanları dışındaki elemanların tümünün sıfır olduğu karesel matrislerdir.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ örnek olarak verilebilirler.

Skaler Matris

Ana köşegen elemanları eşit olan köşegen matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ örnek olarak verilebilirler.}$$

Birim Matris

Ana köşegen elemanları 1 olan köşegen matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ örnek olarak verilebilirler.}$$

Üçgensel Matris

(I) Alt üçgensel matris:

Ana köşegen üzerindeki tüm elemanların sıfır olduğu matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \text{ örnek olarak verilebilirler.}$$

(II) Üst üçgensel matris:

Ana köşegen altındaki tüm elemanların sıfır olduğu matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ örnek olarak verilebilirler.}$$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 3 & k-1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & m-4 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi simetrik ise $k + m$ kaçtır?

$$k - 1 = -1 \Rightarrow k = 0$$

$$m - 4 = 3 \Rightarrow m = 7$$

$$k + m = 7$$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} k-3 & 4 & m-1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisi ters simetrik ise } k + m \text{ kaçtır?}$$

$$k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3$$

$$m - 1 = -5 \Rightarrow m = -4$$

$$k + m = -1$$

b) Matrislerde Toplama ve Çıkarma

Sadece aynı türden matrisler toplanabilir veya çıkarılabilir.

Özellikler:

A, B, C matrisleri $m \times n$ tipinde;

c_1 ve c_2 sayıları gerçel sayılar

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = (A + B) + C$
- $c_1(A + B) = c_1A + c_1B$
- $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$
- $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} \lfloor \pi \rfloor & \lceil \log_2 7 \rceil \\ \operatorname{sgn}(\pi) & \int_0^1 x dx \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) & \lfloor e \rfloor \\ 3 & \operatorname{sgn}(e) \end{bmatrix}$$

matrisleri için $3A - 2B$ matrisi nedir?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) Matrisin Transpozu (Devriği)

Matrisin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen matrise bu matrisin transpozu (devriği) denir.

A^T ile gösterilir.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ise $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ olur.

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise $B^T = [1 \ 3 \ 2]$ olur.

Özellikler:

- $(A^T)^T = A$
- $(A \mp B)^T = A^T \mp B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(cA)^T = cA^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $A = A^T$ ise A matrisine simetrik matris denir.
- $A = -A^T$ ise A matrisine ters simetrik matris denir.

d) Matrislerin çarpımı

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ matrislerinin çarpılabilmesi için $n = p$ olmalı.

Örneğin;

$A_{3 \times 5}$ ve $B_{5 \times 2}$ için $(AB)_{3 \times 2}$ olur.

$A_{2 \times 1}$ ve $B_{1 \times 3}$ için $(AB)_{2 \times 3}$ olur.

$A_{3 \times 4}$ ve $B_{2 \times 3}$ için A . B tanımlanmaz.

Özellikler:

- $A.(B.C) = (A.B).C$
- $A.B \neq B.A$
- $A.(B+C) = A.B + A.C$
- $A.I = I.A = A$ (I birim matris)
- $A^m.A^n = A^n.A^m$



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ ise

A.B matrisini bulunuz.

$$A.B = \begin{bmatrix} 6 + 1 + 0 \\ 9 - 2 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 23 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$



$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ise **A . B matrisini bulunuz.**

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1+6-2 & 12+6 \\ 8+1 & 16-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 18 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ bulunur.}$$



$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = x^2 - 3x + 3$ ise **f(A) nedir?**

$$f(A) = A^2 - 3A + 3I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = x^2 - 2x + 3$ veriliyor $f(A)$ nedir?

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ise $f(A)$ nedir?

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -8 & -2 \\ 2 & 17 & 6 \\ 1 & 12 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \\ -2 & -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 2 \\ 2 & 13 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ise A^{100} matrisi nedir?

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100.3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 300 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3



$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise A^{200} matrisi nedir?

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{200} = \begin{bmatrix} 1 & 200 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ise A^{50} matrisi nedir?

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = I$$

$A^{50} = I^{25} = I$



$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ise A^{40} matrisi nedir?

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 4I$$

$A^{40} = 4^{20} \cdot I^{20} = 2^{40} \cdot I$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ ise $f(A)$ nedir?

$$f(A) = I + A^2 + A^4 + A^6 + A^8 + A^{10}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

$$A^4 = 4I$$

$$A^6 = 8I$$

$$A^8 = 16I$$

$$A^{10} = 32I$$

$$f(A) = 32I + 16I + 8I + 4I + 2I + I = 63I = \begin{bmatrix} 63 & 0 \\ 0 & 63 \end{bmatrix}$$

e) Matrisin Çarpmaya Göre Tersi
(2x2 tipindekiler için)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ matrisi için } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ dir.}$$

$ad - bc = 0$ olursa matrisin çarpmaya göre tersi yoktur.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersi nedir?

$$A^{-1} = \frac{1}{2+12} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersi nedir?

$$A^{-1} = \frac{1}{12+2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & a \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersi yoksa a değeri nedir?

$$2a - 12 = 0 \Rightarrow a = 6$$

Konu ile ilgili örnekler:

- A matrisi için $A^k = 0$ sağlayan bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa A 'ya nilpotent matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ için } A^3 = 0 \Rightarrow A \text{ nilpotent matristir.}$$

- $A^2 = A$ sağlayan bir A matrisine idempotent matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ idempotent matristir.}$$

- $\overline{A^T} = A$ ise A 'ya hermityen matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3+i & -i \\ 3-i & 2 & 3 \\ i & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisi için } \overline{A^T} = A \text{ olduğundan}$$

A hermityen matristir.

- $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ x-y & -1 & 6 \\ 0 & 2x+y & 4 \end{bmatrix}$ matrisi üst üçgensel matris ise x nedir?

$$\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ \hline 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}$$



$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ve $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise $a + b + c$ nedir?

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \begin{cases} 2a + b - 3c = 1 \\ -a + b + c = 0 \\ -2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{2R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \boxed{b = 1} \\ 3b - c = 1 \\ \boxed{c = 2} \\ -a + b + c = 0 \\ -a + 1 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3} \\ a + b + c = 6 \end{array}$$



A ve B kare matrisleri için A simetrik ve B ters simetrik ise hangisi simetriktir?

- A) $A + A^T + 2B$ B) $A + 2B + B^T$ C) $A + B^T$
D) $A \cdot B$ E) $A + B + BT$

$C^T = C$ arıyoruz.

E) şıkında $A + B + \underbrace{B^T}_{-B} = A + B - B = A$ simetriktir.



$f: \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = \cos x + \sin y$ ise

$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ değeri nedir?

$$\begin{array}{l} f_{xx} = -\cos x \\ f_{yy} = -\sin y \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yx} = 0 \end{array} \quad \begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{vmatrix} = \cos x \cdot \sin y$$

2- Determinant

Determinant fonksiyonu, kare matrisleri bir sayıya eşleştiren fonksiyondur.

$\det(A)$ veya $|A|$ ile A matrisinin determinantını ifade ederiz.

- $A = [a]_{1 \times 1}$ için $\det(A) = a$
- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ için $\det(A) = ad - bc$



$A = \begin{bmatrix} \log_2 7 & -1 \\ 3 & \log_7 16 \end{bmatrix}$ matrisi için $\det(A)$ kaçtır?

$$\det(A) = \log_2 7 \cdot \log_7 16 + 3 = \log_2 16 + 3$$

$$= 4 + 3 = 7$$



$A = \begin{bmatrix} 3 & \int_0^2 |x| dx \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ise $\det(A)$ kaçtır?

$$\int_0^2 |x| dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx = 1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 5 = 7$$



$\begin{vmatrix} 2014 & 2008 \\ 2020 & 2014 \end{vmatrix}$ değeri kaçtır?

2008 = x olsun

$$\begin{vmatrix} x+6 & x \\ x+12 & x+6 \end{vmatrix} = (x+6)^2 - x \cdot (x+12)$$

$$= x^2 + 12x + 36 - x^2 - 12x$$

$$= 36$$



$\begin{vmatrix} 1980 & 1988 \\ 1972 & 1980 \end{vmatrix}$ değeri kaçtır?

1972 = x olsun

$$\begin{vmatrix} x+8 & x+16 \\ x & x+8 \end{vmatrix} = (x+8)^2 - x \cdot (x+16)$$

$$= x^2 + 16x + 64 - x^2 - 16x = 64$$

a) Sarrus Kuralı

A 3x3 tipinde bir matris ise $\det(A)$ aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23})$$

$$- (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$



$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-8 + 15 + 0) - (-1 + 40 + 0)$$

$$= 7 - (39) = -32 \text{ bulunur.}$$



$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ determinatının değeri kaçtır?

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0 - 24 - 5) - (0 + 45 + 4)$
 $= -29 - 49 = -78$

b) Minör ve Kofaktör

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde a_{ij} elemanın bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle oluşan matrisin determinatına a_{ij} elemanın minörü denir. M_{ij} ile gösterilir.

Tanım: M_{ij} minörünün $(-1)^{i+j}$ ile çarpımına a_{ij} elemanın kofaktörü (işaretli minörü ya da eş çarpanı) denir. A_{ij} ile gösterilir.



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için a_{22} , a_{32} , a_{31} elemanlarının

minörlerini ve kofaktörlerini bulunuz.

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \rightarrow A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 12 = 12$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-10) = 10$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7 \rightarrow A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 7 = 7$

c) Kofaktör yardımıyla determinat hesabı



$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinat değeri kaçtır?

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$
 $= 3 \cdot (-4 - 15) - 2 \cdot (5) = -57 - 10 = -67$



$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinat değeri kaçtır?

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$
 $= 3 \cdot 17 - 8 = 51 - 8 = 43$

d) Determinantın özellikleri:

- Bir satırın veya bir sütunun tüm terimleri sıfır ise determinat değeri sıfır olur.

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0, |B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$

örnek olarak verilebilirler.

- İki satırın elemanları veya iki sütunun elemanları orantılı ise determinat değeri sıfır olur.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 5 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0, |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 7 \\ 5 & 10 & 13 \end{vmatrix} = 0$

örnek olarak verilebilirler.

- Bir matrisin determinanı ile bu matrisin transpozunun determinanı birbirine eşittir.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 3 & -4 \\ z & 5 & 7 \end{vmatrix} \text{ örnek olarak verilebilir.}$$

- İki satır veya iki sütun yer değiştirirse determinant işaret değişir.

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 5 \text{ ise } \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -5 \text{ olur ya da}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -40 \text{ ise } \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -40 \text{ olur.}$$

- Herhangi bir satır veya sütunun k ile çarpımı determinantın k ile çarpımına eşittir.

$$\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ olur.}$$

Ya da $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 20 \text{ ise}$

$$\begin{vmatrix} 15a & 3b & 3c \\ 10 & 4 & 3 \\ 5x & y & z \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{③}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3.5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

⑤

$$= 15 \cdot 20 = 300 \text{ olur.}$$

- Bir satır veya sütunu bir reel sayı ile çarpıp diğer bir satır veya sütuna eklersek determinant değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5 \text{ ise}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a+2 & b+4 & c+6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5 \text{ olur.}$$

$2R_1 + R_2$

Ya da $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ a & b+3a & c \\ x & y+3x & z \end{vmatrix} = 5 \text{ olur.}$

$\uparrow$
 $3K_1 + K_2$

- $k \in \mathbb{R}$
 A $n \times n$ matris olmak üzere $\left. \begin{matrix} |kA| = k^n |A| \end{matrix} \right\}$

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ için } |A| = 4 \text{ ise } |5A| = 5^2 |A| = 100 \text{ olur.}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ ise } |A| = 5 \text{ ise } |3A| = 3^3 |A| = 27 \cdot 5 = 135 \text{ olur.}$$

- $\left. \begin{matrix} |A^n| = |A|^n \\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} |A| = 3 \text{ ise } |A^4| = |A|^4 = 81 \text{ olur.} \\ |A| = 5 \text{ ise } |A^{-1}| = \frac{1}{5} \text{ olur.} \end{matrix}$



$$\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 8 & 5 & 9 \\ -4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \text{ ise } x \text{ değeri kaçtır?}$$

1. ve 3. satırlar orantılı:

$$\frac{2}{-4} = \frac{x}{1} = \frac{3}{-6} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & -10 \end{vmatrix} = 0 \text{ ise } x \text{ değeri kaçtır?}$$

1. ve 3. sütunlar orantılı;

$$\frac{1}{x} = \frac{-2}{4} = \frac{5}{-10} \rightarrow x = -2 \text{ bulunur.}$$



$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ a & b & 3 \\ 4 & -1 & c \end{vmatrix} = 5 \text{ ise } \begin{vmatrix} -4 & a & 4 \\ 6 & b & -1 \\ 6 & 9 & 3c \end{vmatrix} \text{ determinanı}$$

kaçtır?

$$\begin{vmatrix} -4 & a & 4 \\ 6 & b & -1 \\ 6 & 9 & 3c \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{2.3.}} \begin{vmatrix} -2 & a & 4 \\ 3 & b & -1 \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix} = 30$$

↓
②

③

$|A^T| = |A| = 5$



$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \text{ determinatının değeri nedir?}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-K_1 + K_2 \quad -K_1 + K_3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix}$$

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix}$

$$= (y-x)(z-x) \cdot (z-y) \text{ elde edilir.}$$

e) Ek Matris (Adjoint Matris)

Matrisin terimleri yerine o terimlerin kofaktörlerinin yazılarak oluşturulduğu matrisin transpozunu alınarak elde edilen matrise **ek matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ için } ek(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ için } ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ için } ek(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ -7 & 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ için } \begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -34 \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = -47 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde diğerleri elde edilir.

$$\text{Bundan } ek(A) = \begin{bmatrix} -34 & -47 & 11 \\ -4 & 8 & -19 \\ 5 & -10 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -34 & -4 & 5 \\ -47 & 8 & -10 \\ 11 & -19 & -5 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

f) Matrisin çarpmaya göre tersi

A matrisinin tersi $A^{-1} = \frac{ek(A)}{\det(A)}$ ile bulunur.

$\det(A) = 0$ ise matrisin tersi yoktur.



Verilen matrislerden hangilerinin tersi yoktur?

A) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(A) 1. ve 3. sütunlar orantılı, determinant sıfır, dolayısıyla tersi yoktur.

(B) 1. ve 2. satırlar orantılı, tersi yoktur.

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= (-28) + 5(-6) = -58 \neq 0$ Tersi vardır.

(D) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ Tersi vardır.

g) Matrisin rankı

Bir matrisin kare alt matrislerinden determinantı sıfırdan farklı olan en büyük kare matrisin mertebesine matrisin rankı denir ve $\text{rank}(A)$ ile gösterilir.



$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı kaçtır?

$|A| = 0$ olduğundan $\text{rank}(A) < 3$ olur.

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -19 \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A) = 2$



$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı kaçtır?

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \text{rank}(A) = 2$



$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı 3 ise a kaç olamaz?

$|A| \neq 0$ olmalı $\frac{-1}{a} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ olursa determinant sıfır olur.

$a \neq -2$ olmalı

h) Elemanter satır (sütun) işlemleri

- Herhangi iki satır (sütun) yer değiştirebilir.
- Herhangi bir satırı (sütunu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpabiliriz.
- Herhangi bir satırı (sütunu) c ile çarpıp başka bir satıra (sütuna) ekleyebiliriz.

Örnek

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi $I_{2 \times 2}$ birim matrise en az kaç tane satır işlemi yapılarak elde edilmiştir?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} 3R_2 + R_1 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} 5R_2 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3 elemanter satır işlemi

Konu ile ilgili örnekler:

Örnek

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ için M_{21} , M_{33} minörleri A_{21} , A_{33} kofaktörleri nelerdir?

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1) \cdot (-2) = 2, \quad A_{33} = (+) \cdot (-5) = -5$$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & k+3 \end{bmatrix}$ matrisi tersinir olmadığına göre k kaçtır?

$$|A| = 0 \Rightarrow 2k + 6 + 32 = 0$$

$$k = -19$$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankı kaçtır?}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rank } A < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rank } A = 2$$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankı kaçtır?}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{rank } A < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \dots \text{rank } A \neq 2$$

$$|1| = 1 \neq 0 \quad \text{rank } A = 1$$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ k & 12 & -8 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankı 1 ise k kaçtır?}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{12} = \frac{-2}{-8} \Rightarrow k = 3$$

Örnek

A 5x5 tipinde bir matris ve tersinir ise hangisi her zaman doğrudur?

- A) $\det A = 5$ B) $\text{rank} A = 1$ C) $\det A = 4$
D) $\text{rank} A = 5$ E) $\text{rank} A = \det A$

A tersinir ise $\text{rank} A = n = 5$ olur.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ veriliyor.

$f(A)$ nedir?

$P(x)$ polinomu ve A köşegen matrisi düşünelim.

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ise $P(A) = \begin{bmatrix} P(a) & 0 & 0 \\ 0 & P(b) & 0 \\ 0 & 0 & P(c) \end{bmatrix}$ olur.

$f(A) = \begin{bmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ 0 & f(3) & 0 \\ 0 & 0 & f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Örnek

$n \geq 2$, A ve B $n \times n$ tipli matrisler olmak üzere hangisi her zaman doğrudur?

- A) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
B) $|A^2| = 2|A|$
C) $|A+B| = |A| + |B|$
D) $|A^T| = 2|A|$
E) $|A^{-1}| = -|A|$
(A) şıkkı için $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ dir.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3k & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi olmadığına göre k değeri kaçtır?

$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3k & 0 \end{vmatrix} + (3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3k \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 3k + 3 \cdot (12k - 10) = 0$

$3k + 36k - 30 = 0 \Rightarrow 39k = 30$

$k = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi için $\text{ek}(A)$ nedir?

$\text{ek}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için $\det(A^{-1}) + \det(-A)$ nedir?

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 0) - 2 \cdot (0 - 2) = 3 + 4 = 7$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{7}$ $\det(-A) = (-1)^3 \cdot \det(A) = -7$
 $\left. \begin{array}{l} \det(A^{-1}) = \frac{1}{7} \\ \det(-A) = -7 \end{array} \right\} -7 + \frac{1}{7} = -\frac{48}{7}$

3- Lineer (Doğrusal) Denklem Sistemleri

a) $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

- $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ için sonsuz çözüm vardır.
- $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ için çözüm yoktur.
- $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ için tek çözüm vardır.

Örneğin;

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$$

sisteminin sonsuz çözümü vardır.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 7 \end{cases}$$

sisteminin çözümü yoktur.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -4x + 5y = 6 \end{cases}$$

sisteminin tek çözümü vardır.

b)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = e \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = f \end{cases}$$

sistemi çözme için şu sistem oluşturulur:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisi Bilinmeyenler vektörü Sabitler vektörü

Örneğin;

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 10)z = a + 5 \end{cases} \text{ sistemini inceleyelim.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (a^2 - 10) & a + 5 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1+R_2, -R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 9 & a + 3 \end{array} \right]$$

• $a = 3$ için $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
çözüm yok

• $a = -3$ için $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sonsuz çözüm $\begin{cases} 3 \text{ bilinmeyen} \\ 2 \text{ denklem} \end{cases}$

$$\begin{cases} m \text{ bilinmeyen sayısı} \\ n \text{ denklem sayısı} \end{cases} \begin{cases} m > n \text{ sonsuz çözüm} \\ m = n \text{ tek çözüm} \\ m < n \text{ çözüm yok} \end{cases}$$

• $\begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -3 \end{cases}$ için 3 denklem = 3 bilinmeyen
Tek çözüm

$$m = n \longleftrightarrow \text{Tek çözüm}$$

- $AX = B$ sistemleri için
 $m > n$ ise sonsuz çözüm
 $m = n$ ise tek çözüm olur.

Özel olarak 3x3 matrisleri için;

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ Tek çözüm

$|A| = 0 \begin{cases} \rightarrow \text{Sonsuz çözüm} \\ \rightarrow \text{Çözüm yok} \end{cases}$

- $AX = 0$ sistemleri için
 $m = n \Rightarrow$ Tek çözüm (0,0,0)
 $m > n \Rightarrow$ Sonsuz çözüm

Örneğin;

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ 3x + 2y + az &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin sıfırdan farklı çözümleri var ise a ne olmalıdır?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2R_1+R_2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & a & -3R_1+R_3 & 0 & 5 & a-6 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & a-7 & 0 & 0 & a-7 \end{array} \right] \quad a-7=0 \Rightarrow a=7 \text{ için sonsuz çözüm olur.}$$

Özel olarak 3x3 matrisleri için

$|A| = 0 \Rightarrow$ Sonsuz çözüm

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ Tek çözüm (0,0,0)

Örnek

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \text{ denkleminin çözüm kümesi}$$

nedir?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & -R_1+R_2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2R_1+R_3 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} -3y = -3 \Rightarrow y = 1 \\ -y - 2z = -1 \Rightarrow z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

(2,1,0) çözümdür.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ için $AX = 0$ homojen denkleminin çözüm uzayının boyutu kaçtır?

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2R_1+R_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \text{ bilinmeyen} \\ 1 \text{ denklem} \end{array}$$

1 değişkene bağlı
sonsuz çözüm

Serbest değişken sayısı = Çözüm uzayının boyutu = 1

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ için $AX = 0$ homojen denkleminin çözüm uzayının boyutu kaçtır?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -2R_1+R_2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -3R_1+R_3 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 3 \text{ bilinmeyen} \\ 2 \text{ denklem} \\ 1 = \text{çözüm uzayının boyutu} \end{array}$$

Örnek

$$\begin{cases} -x + y + 3z + t = 0 \\ -2x + 5z = 0 \\ 3x - 3y - 9z - 3t = 0 \\ 4x - 10z = 0 \end{cases} \text{ denkleminin çözüm uzayının boyutu nedir?}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -9 & -3 & +3R_1+R_3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -10 & +2R_2+R_4 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \text{ bilinmeyen} \\ 2 \text{ denklem} \\ 2 = \text{çözüm uzayının boyutu} \end{array}$$



• $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi tersinir ise ne söylenebilir?

- $ad - bc \neq 0$
- $AX = 0$ sisteminin tek çözümü vardır. O da $(0, 0, 0)$ vektörüdür.
- A elemanter matrislerin çarpımıdır.
- $A, I_{2 \times 2}$ birim matrise denktir.

• $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi singüler (tekil) ise ne söylenebilir?

- $ad - bc = 0$
- $AX = 0$ sisteminin sonsuz çözümü vardır.
- $A, I_{2 \times 2}$ birim matrise denk değildir.
- A elemanter matrislerin çarpımı değildir.



$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi için ne söylenebilir?

- Kural:
Alt ya da üst üçgensel matrislerin determinanı köşegen elemanlarının çarpımıdır.
- $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $|A| = 24 \neq 0$ olduğundan tersinirdir.
- A 'nın rankı 4'tür.
- $AX = 0$ homojen sisteminin tek çözümü $(0,0,0)$ 'dir.
- $A, I_{4 \times 4}$ birim matrise denktir.
- A , elemanter matrislerin çarpımıdır.

c) Bir matrisin karakteristik denklemi

A nxn matrisi için

$|A - \lambda I| = 0$ denkleminde A matrisinin karakteristik polinomu denir. Bu denklemin köklerine (λ) ise özdeğer denir.

Örneğin;

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi için;

a) Karakteristik polinomu bulalım.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \text{ bulunur.}$$

b) Özdeğerleri bulalım.

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \right\} \text{ özdeğerler}$$

c) Özevektörleri bulalım

• $\lambda = 2$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = 1$$

$$\vartheta_2 = 1 \text{ alabiliriz.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{özevektör}$$

• $\lambda = 3$ için

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = 1$$

$$\vartheta_2 = 2 \text{ alabiliriz.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{özevektör}$$

d) $A^2 - 5A$ değeri nedir?

Cayley - Hamilton Teoremi: Bir A matrisi karakteristik polinomu sağlar.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \text{ ise } A^2 - 5A + 6I = 0$$

$$A^2 - 5A = -6I \text{ bulunur.}$$

e) Matrisler köşegenleştirilebilir mi?

Özdeğerler farklı olduğundan köşegenleştirilebilir.



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisi için;}$$

- a) Özdeğerler nelerdir?
 b) Özdeğerler toplamı nedir?
 c) Özdeğerler çarpımı nedir?

a)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 \end{array} \right\}$$

b) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 + 1 + 4 = 4$

Pratik yol

Özdeğerler toplamı köşegen elemanlarının toplamıdır.

$$2 + 3 + (-1) = 4$$

c) Özdeğer çarpımı

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -4$$

Pratik yol

Özdeğerler çarpımı determinanta eşittir.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 - 2) = -4$$

d) Matrisin eşelon (basamak) formu

1- Satır Basamak Eşelon Form

Aşağıdaki şartları sağlayan bir A matrisi satır basamak eşelon form şeklinde bir matristir:

- Her satırda sıfırdan farklı olan ilk elemana pivot denir ve pivot 1'e eşittir.
- Pivotun sol tarafındaki elemanlar sıfıra eşittir.
- Pivotlar yukarıdan aşağıya doğru ve soldan sağa ilerlerler.

Şu matrisleri örnek verebiliriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2- İndirgenmiş satır basamak eşelon form

Matris satır basamak eşelon formu sağlar ve pivotun bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfıra eşittir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gibi matrisler örnek gösterilebilir.



Aşağıdaki matrisler için eşelon (e.f.) form analizi yapalım.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (a) Satır basamak e.f.
 (b) İndirgenmiş satır basamak e.f.
 (c) e.f. değil
 (d) e.f. değil

e) Elementer Matris

$I_{n \times n}$ birim matristen tek satır (sütun) işlemi yapılarak elde edilen matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (R_1 \leftrightarrow R_3)$$

↓
Elementer matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3R_1 + R_2 \rightarrow R_2)$$

↓
Elementer matris



Aşağıdaki matrislerden hangileri elementer matristir?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	(b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	(f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) 2 satır işlemi, elementer matris değil

(b) 1 satır işlemi, elementer matris

(c) 1 satır işlemi, elementer matris

(d) 1 satır işlemi, elementer matris

(e) 2 satır işlemi, elementer matris değil

(f) 2 satır işlemi, elementer matris değil

Konu Sonu Soruları



$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri nelerdir?

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (4-\lambda) \cdot (-1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 2$
 $\lambda_2 = 4$
 $\lambda_3 = -1$



$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özvektörleri nelerdir?

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-6$$

$\lambda^2-3\lambda-4=0$
 $(\lambda-4)(\lambda+1)=0$
 $\lambda_1 = -1$
 $\lambda_2 = 4$

• $\lambda_1 = -1$ için

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0$$

$\vartheta_1 = 1$
 $\vartheta_2 = -2$ } $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ özvektör

• $\lambda_2 = 4$ için

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -3\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0$$

$\vartheta_1 = 1$
 $\vartheta_2 = 3$ } $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ özvektör

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin toplamı = a, özdeğerlerinin çarpımı = b ise a + b nedir?

$$a = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1 + 2 - 2 = 1 = a$$

$$b = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (2 - 6) - 8 = b$$

$$a + b = 9$$

Örnek

$\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -5x + 3y + kz = 5 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ denkleminin tek çözümü varsa k ne olamaz?

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & k \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 1 \cdot (3 + k) + (-5 - 2k) + 2 \cdot (5 - 6) \neq 0$$

$$3 + k - 5 - 2k - 2 \neq 0$$

$$-k - 4 \neq 0 \Rightarrow k \neq -4$$

Örnek

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + kz = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

denkleminin sonsuz çözümü varsa k nedir?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & k \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad 1 \cdot (5 + k) + 3 \cdot (2k - 3) = 0$$

$$5 + k + 6k - 9 = 0$$

$$7k - 4 = 0$$

$$k = \frac{4}{7}$$

Örnek

$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$ diferansiyel denklem sisteminin katsayılar matrisinin karakteristik polinomu ve özdeğerler çarpımını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0 \text{ karakteristik polinom}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A| = 8 + 3 = 11 \Rightarrow \text{özdeğer çarpımı}$$

4- Vektör uzayları

Aşağıdaki koşulları sağlayan V kümesine, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır denir.

(I) (V, +) yapısı abelyendir.

(II) • $\forall c \in \mathbb{R}$ ve $\forall \theta \in V$ için $c\theta \in V$ tanımlı,

$$\bullet \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall \theta \in V \text{ için } (c_1 + c_2)\theta$$

$$= c_1\theta + c_2\theta \text{ 'dir.}$$

$$\bullet \forall c \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall \theta_1, \theta_2 \in V \text{ için } c(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= c\theta_1 + c\theta_2 \text{ 'dir.}$$

$$\bullet \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall \theta \in V \text{ için } c_1(c_2\theta)$$

$$= (c_1c_2)\theta \text{ olur.}$$

$$\bullet 1 \in \mathbb{R}, \forall \theta \in V \text{ için } 1 \cdot \theta = \theta \text{ olur.}$$

$$(II) \forall \theta \in V \text{ için } 0 \cdot \theta = \vec{0}$$

$$(IV) \forall c \in \mathbb{R}, \forall \theta \in V \text{ için } (-c) \cdot \theta = -(c\theta) = c(-\theta) \text{ olur.}$$

$$(V) \forall \theta \in V \text{ için } (-\theta) \in V \text{ tanımlıdır.}$$

$$(VI) 0_V \in V \text{ tanımlıdır.}$$

Örnek

U ve W, V' nin iki alt uzayı ise hangisi her zaman doğrudur?

- (a) $U \cup W$, V için alt uzaydır.
- (b) $U \setminus \{O_V\}$, V için alt uzaydır.
- (c) $U \setminus W$, V için alt uzaydır.
- (d) $U \cap W$, V için alt uzaydır.
- (e) $U \cup \{O_V\}$, V için alt uzaydır.

U alt uzay iken $\{O_V\}$ ile birleşirse yine alt uzaylığı korunur. (e) doğrudur her zaman.

Örnek

V kümesi, F cismi üzerinde vektör uzayı.

$c \in F$ ve $\vec{0} \in V$ veriliyor. Hangisi her zaman doğru değildir?

- (a) $1_F \cdot \vec{0} = \vec{0}$
 - (b) $0 \cdot \vec{0} = \vec{0}$
 - (c) $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$
 - (d) $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ise $c = 0$
 - (e) $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ise $\vec{0} = \vec{0}$
- $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ise $c = 0$ veya $\vec{0} = \vec{0}$ olur.
- (d) ve (e) her zaman doğru değildir.

a) Alt vektör uzayı

V vektör uzayı ve $W \subset V$ alt kümesi verilsin. Aşağıdaki şartları sağlayan W kümesine V' nin alt vektör uzayı denir.

- $W \neq \emptyset$
- $\forall \vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2 \in W$ için $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \in W$
- $\forall c \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{\theta} \in W$ için $c\vec{\theta} \in W$

Örnek

$W = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 4x_2 = 0 \}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ nin alt uzayı mıdır?

- $(0,0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$
- $(x_1, x_2) \in W \Rightarrow x_1 - 4x_2 = 0$
 $(y_1, y_2) \in W \Rightarrow y_1 - 4y_2 = 0$
 $(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2) = 0$ olduğundan
 $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in W$
- $(x_1, x_2) \in W \Rightarrow x_1 - 4x_2 = 0 / c$
 $(cx_1) - 4cx_2 = 0$
olduğundan $(cx_1, cx_2) \in W$
alt vektör uzaydır.

Örnek

$W = \{ (x, 0, 0, y), x, y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^4$ alt vektör uzayı mıdır?

- $x = 0$
 $y = 0$ $(0, 0, 0, 0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$
- $(x_1, 0, 0, y_1) \in W$
 $(x_2, 0, 0, y_2) \in W$
 $(x_1 + x_2, 0, 0, y_1 + y_2) \in W$
- $(x, 0, 0, y) \in W$
 $c(x, 0, 0, y) = (cx, 0, 0, cy) \in W$
Alt vektör uzayıdır.

Örnek

$W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \} \subset \mathbb{R}^3$ alt vektör uzayı mıdır?

- $x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$
 $y_1 + 3y_2 - 4y_3 = 5$
 $(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3) = 10 \neq 5$
Alt vektör uzayı değildir.

Örnek

Aşağıda verilen eğrilerden hangileri $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayıdır?

- (a) $y = x + 2$ (b) $x + y = 5$
 (c) $y = 0$ (d) $x = 2$
 (e) $x - y = 1$ (f) $x - y = 0$
 (g) $x \cdot y = 0$

(a) $y_1 + x_1 + 2$
 $+ y_2 = x_2 + 2$
 $(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + 4 \rightarrow 2$ olmalıydı
 Alt uzay değildir.

(b) $x_1 + y_1 = 5$
 $+ x_2 + y_2 = 5$
 $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 10 \neq 5$
 Alt uzay değildir.

(c) $y_1 = 0$
 $+ y_2 = 0$ Alt uzaydır.
 $y_1 + y_2 = 0$

(d) $x_1 = 2$
 $+ x_2 = 2$ Alt uzay değildir.
 $x_1 + x_2 = 4 \neq 2$

(e) $x_1 - y_1 = 1$
 $+ x_2 - y_2 = 1$ Alt uzay değildir.
 $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 2 \neq 1$

(f) $x_1 - y_1 = 0$
 $+ x_2 - y_2 = 0$
 $(x_1 + y_2) - (y_1 + y_2) = 0$ Alt uzaydır.

(g) $x_1 \cdot y_1 = 0$
 $+ x_2 \cdot y_2 = 0$
 $(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) = \underbrace{x_1 y_1}_{0} + \underbrace{x_2 y_2}_{0} + x_2 y_1 + x_1 y_2$
 Alt uzay değildir.

Örnek

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ aşağıdaki hangi durumlarda $P_2(x)$ ikinci derece polinomlar uzayının alt uzayıdır?

- (a) $a_0 = 0$
 (b) $a_0 + a_2 = 0$
 (c) $a_2 - a_1 = 1$

(a) $a_1 x + a_2 x^2 \in W$
 $+ b_1 x + b_2 x^2 \in W$
 $(a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in W$ ✓

(b) $a_0 + a_1 x - a_2 x^2 \in W$
 $+ b_0 + b_1 x - b_2 x^2 \in W$
 $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x - (a_2 + b_2)x^2 \in W$ ✓

(c) $a_0 + a_1 x + (a_1 + 1)x^2 \in W$
 $+ b_0 + b_1 x + (b_1 + 1)x^2 \in W$
 $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_1 + b_1 + 2)x^2 \notin W$ ✗
 1 olmalıydı

Örnek

Aşağıdakilerden hangi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt vektör uzayı değildir?

(a) $W = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b + c = 0 \}$

(b) $W = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 3a + 4b - 8c = 0 \}$

(c) $W = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0 \}$

(d) $W = \mathbb{R}^3$

(e) $W = \{ (0, 0, 0) \}$

(c) sıkı alt vektör uzayı oluşturmaz.

$\left. \begin{array}{l} a_1 b_1 c_1 = 0 \\ a_2 b_2 c_2 = 0 \end{array} \right\}$ iken $(a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)(c_1 + c_2) \neq 0$

5- Lineer Bileşim

V vektör uzayı

$\forall c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\forall \vartheta_i \in V$ $(1 \leq i \leq n)$

$\sum_{i=1}^n c_i \vartheta_i = c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2 + \dots + c_n \vartheta_n$ ifadesine

$\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ kümesinin lineer bileşimi denir.

• $c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2 + \dots + c_n \vartheta_n = 0$ iken

$\forall c_i = 0$ ise $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ kümesi

lineer bağımsız,

$\exists c_i \neq 0$ ise $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ kümesi

lineer bağımlıdır.

• $S = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\} \in V$ için

V kümesinin tüm elemanları için;

$\forall \vartheta \in V$ için $\vartheta = c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2 + \dots + c_n \vartheta_n$

olacak şekilde S kümesinin elemanlarının lineer bileşimi olacak şekilde yazılıyorsa S kümesi, V' yi gerer denir.



Aşağıdaki kümelerin lineer bağımlılığını araştırınız.

(a) $\{(1, 2, 1), (-3, 2, 5), (2, -1, -3)\}$

(b) $\{(1, 0, 3), (2, -1, 4), (2, 1, 5)\}$

(a)

$$c_1(1, 2, 1) + c_2(-3, 2, 5) + c_3(2, -1, -3) = 0$$

$$\begin{array}{l} c_1 - 3c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + 5c_2 - 3c_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} c_1 \quad c_2 \quad c_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 8 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -R_2 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sonsuz çözüm, $\exists c_i \neq 0$ vardır.

Lineer bağımlı

Pratik Yol 1:

Determinant sıfır ise lineer bağımlıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6+5) + 3 \cdot (-6+1) + 2 \cdot (10-2) = -1 - 15 + 16 = 0$$

Pratik Yol 2:

$-R_1 + R_2 = R_3$ lineer bağımlı.

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5-4) + 3 \cdot (2+2) = -9 + 12 \neq 0 \quad \forall c_i = 0$$

Lineer bağımsız



(a) $\langle (1, 2, -1), (-3, 1, 0), (2, -3, 2) \rangle$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ü gerer mi?

Kural:

• Eleman sayısı en az V' nin boyutu kadar olmalı.

• Lineer bağımsız olmalı.

• Eleman sayısı 3 = Boyut ($\mathbb{R}^3$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (4-3) + 2 \cdot 1 = 2 + 3 + 2 = 7 \neq 0$$

Lineer bağımsız

$\mathbb{R}^3$ ü gerer.

(b) $\langle (1, 0, 1), (0, 1, 1), (3, -2, 1) \rangle$, $\mathbb{R}^3$ ü gerer mi?

• Eleman sayısı 3 = Boyut ($\mathbb{R}^3$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1+2) + 1 \cdot (-3) = 0$$

Lineer bağımlı

$\mathbb{R}^3$ ü germez.

(c) $\langle (3, -4, 1, 0), (0, 8, 1, 5) \rangle \subset \mathbb{R}^4$ ü gerer mi?

Eleman sayısı 2 < boyut ($\mathbb{R}^4$) olduğundan germez.



Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^2$ yi germez?

- (a) $\{ (2, 3), (4, -1) \}$
- (b) $\{ (1, -3), (2, -1), (3, -4) \}$
- (c) $\{ (3, 4) \}$
- (d) $\{ (0, 0), (0, 1) \}$
- (e) $\{ (-1, 2), (2, -4), (0, 0) \}$
- (a) 2 elemanlı ve lineer bağımsız. GERER.
- (b) 3 elemanlı ve lineer bağımsız. GERER.
- (c) 1 elemanlı. GERMEZ.
- (d) 2 elemanlı ve lineer bağımlı. GERMEZ.
- (e) 3 elemanlı ve lineer bağımlı. GERMEZ.

(a) **Baz ve Boyut**

V vektör uzayında, $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ kümesi V' yi geriyorsa, $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ elemanlarına V' nin bir bazı ve buradaki eleman sayısına ise V vektör uzayının boyutu denir. Boy (V) ile gösterilir.
 $\text{boy}(\mathbb{R}^2) = 2$,
 $\text{boy}(\mathbb{R}^3) = 3$ örnek verilebilir.



Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^2$ için bazdır?

- (a) $\{ (0, 4), (2, 1) \}$
- (b) $\{ (0, 1), (0, -1) \}$
- (c) $\{ (0, 0), (0, 1) \}$
- (d) $\{ (-1, 2), (2, 3), (0, 0) \}$
- (e) $\{ (1, -1), (2, -2), (0, 0) \}$
- (a) $\mathbb{R}^{2'}$ yi gerer. Baz oluşur.
- (b) $\mathbb{R}^{2'}$ yi germez. Baz oluşmaz.
- (c) $\mathbb{R}^{2'}$ yi germez. Baz oluşmaz.
- (d) $\mathbb{R}^{2'}$ yi gerer. Baz oluşur.
- (e) $\mathbb{R}^{2'}$ yi germez. Baz oluşmaz.



$\mathbb{R}^3$ te $\vec{A} = (2, -1, 3)$ ve $\vec{B} = (-1, 3, 2)$ vektörlerinin gerdiği alt uzayın denklemini nedir?

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = i \cdot (-11) - j \cdot (7) + k \cdot 5 \\ = (-11, -7, 5) \Rightarrow -11x - 7y + 5z = 0 \text{ düzlemi oluşur.}$$



Aşağıdaki kümelerin boyutu kaçtır?

- (a) $\{ (1, -2), (2, -3) \}$
- (b) $\{ (1, 0), (-1, 0) \}$
- (c) $\{ (2, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, 3) \}$
- (d) $\{ (1, -2, 3), (0, 1, 4), (1, -1, 7) \}$

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ rank = boyut = 2}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rank boyut = 1}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2R_2 + R_1 \\ -R_2 + R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ rank = boyut = 3}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -R_1 + R_3 \\ -R_2 + R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rank = boyut = 2}$$



$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0, y, z) \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, y) \}$$

kümeleri veriliyor.

U ∩ W nedir?

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ y = z \end{cases} \quad (0, y, y) \text{ vektörü elde edilir.}$$



$$V_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \}$$

$$V_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, z = 0 \} \text{ veriliyor.}$$

V₁ + V₂ vektör uzayının boyutu nedir?

$$V_1 = \{ (x, 0, z) \} = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$V_2 = \{ (y, y, 0) \} = y(1, 1, 0)$$

$$V_1 + V_2 = \{ x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) \}$$

3 boyutludur.

6- Lineer Dönüşümler

U ve V kümeleri R cismi üzerinde birer vektör uzayı olsunlar. Aşağıdaki şartları sağlayan $f : U \rightarrow V$ fonksiyonuna doğrusal (lineer) dönüşüm denir.

- $\forall u, \theta \in U$ için $f(u + \theta) = f(u) + f(\theta)$
- $\forall u \in U$ için $c \in R$ için $f(cu) = cf(u)$



Aşağıdaki dönüşümlerden hangileri lineerdir?

- $L(u) = 3u$
- $L(u) = 2u + 3$
- $L(u) = u^2$
- $L(u) = 5$
- $L(u) = u^3 + 1$

$$\begin{aligned} \text{a) } L(u + \theta) &= 3(u + \theta) = 3u + 3\theta = L(u) + L(\theta) \\ L(cu) &= 3(cu) = c \cdot (3u) = cL(u) \end{aligned}$$

LİNEER

$$\text{b) } L(u + \theta) = 2(u + \theta) + 3 = 2u + 3 + 2\theta \neq L(u) + L(\theta)$$

LİNEER DEĞİL

$$\text{c) } L(u + \theta) = (u + \theta)^2 = u^2 + \theta^2 + 2u\theta \neq L(u) + L(\theta)$$

LİNEER DEĞİL

$$\text{d) } L(u + \theta) = 5 \neq L(u) + L(\theta)$$

LİNEER DEĞİL

$$\text{e) } L(u + \theta) = (u + \theta)^3 + 1 \neq L(u) + L(\theta)$$

LİNEER DEĞİL



Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi lineerdir?

a) $L(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 + 1 \\ 2u_2 \end{pmatrix}$

b) $L(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 + u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

a) $L(u_1 + \partial_1, u_2 + \partial_2) = \begin{pmatrix} u_1 + \partial_1 + 1 \\ 2u_2 + 2\partial_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} L(u_1, u_2) \\ L(\partial_1, \partial_2) \end{pmatrix}$

LİNEER DEĞİL

b) $L(u_1 + \partial_1, u_2 + \partial_2, u_3 + \partial_3)$

$$= \begin{pmatrix} u_1 + \partial_1 \\ 2(u_1 + \partial_1) + (u_2 + \partial_2) \\ u_3 + \partial_3 \end{pmatrix} = L(u_1, u_2, u_3) + L(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$$

LİNEER

a) Lineer dönüşümün matrisle gösterimi



$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x_1, x_2) = (-x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2)$ lineer dönüşümünün $\mathbb{R}^2$ nin standart bazına göre matrisi nedir?

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ nin standart bazına göre matrisi



$T: \mathbb{R}^2$ üzerinde $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ şeklinde tanımlanıyor.

T ' nin $\mathbb{R}^2$ nin standart bazına göre matrisi nedir?

$$\begin{bmatrix} 0x_1 + 1x_2 \\ -1x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Yanıtımız olur



$T: \mathbb{R}^2$ üzerinde $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2)$ şeklinde tanımlanıyor.

(a) T ' nin $\mathbb{R}^2$ nin standart bazına göre,

(b) T ' nin $\mathbb{R}^2$ nin $(1, 1)$, $(2, -1)$ bazına göre matrisi nedir?

(a)
$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 = (1, 0) \\ \vec{e}_2 = (0, 1) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \vec{e}_1 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} \vec{\partial}_1 = (1, 1) \\ \vec{\partial}_2 = (2, -1) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \vec{\partial}_1 \text{ için } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{\partial}_2 \text{ için } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$



$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + 5x_2 - x_3)$ şeklinde tanımlı dönüşümün $\mathbb{R}^3$ un standart bazına göre matrisinin rankı kaçtır?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rank} = 2$$

b) Lineer dönüşümün çekirdeği

$f : U \rightarrow V$ lineer dönüşümü verilsin.

$\text{çek}(f) = \{ u; u \in U \text{ ve } f(u) = \vec{0} \}$ kümesine f lineer dönüşümünün çekirdeği denir.



Aşağıdaki fonksiyonların çekirdeğini ve $\mathbb{R}$ üzerindeki boyutlarını bulunuz.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y, z) = (x-z, y+2z)$$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (2x - y, x+y)$$

(a) $(x - z, y + 2z) = (0, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 0 \Rightarrow x = z \\ y - 2z = 0 \Rightarrow y = 2z \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = k \text{ diyelim} \\ (k, -2k, k) = \text{Çek}(f) \end{array}$$

1 serbest değişken olduğundan çekirdeğin $\mathbb{R}$ üzerindeki boyutu 1'dir.

(b)

$$2x - y = 0$$

$$x + y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} (0, 0) = \text{çek}(f)$$

Çekirdeğin $\mathbb{R}$ üzerindeki boyutu sıfırdır.

Konu ile ilgili Sorular



Hangi dönüşüm lineerdir?

(a) $L(u) = 3u + 5$

(b) $L(u) = u^2 + 1$

(c) $L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + 1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

(d) $L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 - 1 \\ u_2 + u_3 \end{bmatrix}$

(e) $L \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = (2u_1 \ u_1 + u_2)$

(e) şıkkı için

$$L(u_1 + \vartheta_1 \ u_2 + \vartheta_2) = (2(u_1 + \vartheta_1) \ (u_1 + \vartheta_1) + (u_2 + \vartheta_2))$$

$$= (2u_1 \ u_1 + u_2) + (2\vartheta_1 \ \vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$= L(u_1 \ u_2) + L(\vartheta_1 \ \vartheta_2)$$

Lineerdir.



$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşüm veriliyor.

$$\left. \begin{array}{l} T(1, 0) = (3, 4) \\ T(0, -2) = (5, 8) \end{array} \right\} \text{veriliyor.}$$

$T(3, -4)$ nedir?

$$T(1, 0) = (3, 4) / 3$$

$$T(0, -2) = (5, 8) / 2$$

$$T(3, -4) = (19, 28)$$



$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü veriliyor.

$T(x, y, z) = (x + y, y, y)$ lineer dönüşümü için

$\text{Çek}(T)$, $\text{Gör}(T)$, $\text{Boy}(\text{Çek}(T))$, $\text{Boy}(\text{Gör}(T))$ nedir?

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} \quad \text{Çek}(T) = (0, 0, k)$$

$$\text{Gör}T = \{ x(1, 0, 0) + y(1, 1, 1) \}$$

$$\text{Boy}(\text{Çek}T) = 1, \text{Boy}(\text{Gör}T) = 2$$



$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$T(a, b, c, d) = (a + b, c + d, 0)$ için $\text{boy}(\text{Gör}(T))$ nedir?

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = s \\ d = t \\ a = -s \\ c = -t \end{cases}$$

$$(-s, s, -t, t)$$

$$\begin{cases} \text{Boy}(\text{Çek}(T)) = 2 \\ \text{Boy}(\mathbb{R}^4) = 4 \end{cases}$$

$$\text{Boy}V = \text{Boy}(\text{Çek}) + \text{Boy}(\text{Gör})$$

$$4 = 2 + \text{Boy}(\text{Gör})$$

$$\text{Boy}(\text{Gör}(T)) = 2$$



$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x, y) = (3x - y, 2x + 4y)$ lineer dönüşümünün $\mathbb{R}^2$ için standart bazdaki matris gösteriminin özdeğerleri çarpımı kaçtır?

$$T(x, y) = (3x - y, 2x + 4y) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{Özdeğer çarpımı} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$$



$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünün standart baza göre

matrisi $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ise $T(x, y, z)$ nedir?

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + 3z, -x + 2y, 4x + y + 3z)$$



$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -3x + 4y + 2z = 5 \\ -2x + 2y + kz = -1 \end{cases}$ sisteminin çözümü yoksa k nedir?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & k & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} 3R_1 + R_2 \\ 2R_1 + R_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & k+2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & k-3 & -7 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & k-3 & -7 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \\ 8 \\ -7 \end{cases} \quad \begin{cases} k-3=0 \\ k=3 \text{ için çözüm yoktur.} \end{cases}$$



ÖĞRETEN SORU

A matrisi reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı 3×3 biçiminde bir matristir.

A matrisinin tersi alınabildiğine göre, aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur? (ÖABT OMT / 2013)

- A) $\det A = 1$ B) $\text{rank} A = 1$ C) $\det A = 3$
D) $\text{rank} A = 3$ E) $\det A = \text{rank}(A)$

✓ ÖĞRETEN CEVAP

A tersinir $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rank} A = 3$

➔ CEVAP: D



ÖĞRETEN SORU

$$x + y + z = 0$$

$$x + 2y + z = 0$$

$$y + az = 0$$

homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümleri vardır.

Buna göre, a kaçtır? (ÖABT OMT / 2013)

- A) 4 B) 3
C) 2 D) 1
E) 0

✓ ÖĞRETEN CEVAP

Katsayılar matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} = 0 \text{ ise sıfırdan farklı çözümler olur.}$$

Buradan $a = 0$ bulunur.

➔ CEVAP: E



ÖĞRETEN SORU

$\mathbb{R}$ reel sayılar olmak üzere,

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$T(x, y) = (2x + y, 3x - y)$ lineer dönüşümün $\mathbb{R}^2$ için standart bazdaki matris gösterimi aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT OMT / 2013)

- A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

✓ ÖĞRETEN CEVAP

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x - 2y \end{bmatrix}$$

Matris gösterimi

➔ CEVAP: B



ÖĞRETEN SORU

A ve B kare matrislerinden A matrisi simetrik ve B matrisi ters simetriktr.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi simetrik matristir? (ÖABT OMT / 2013)

- A) $A + A^T + B$ B) $A + B + B^T$ C) $A^T + B$
D) $A.B$ E) $-A.B$

✓ ÖĞRETEN CEVAP

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ simetrik} \Rightarrow A^T = A \\ B \text{ ters simetrik} \Rightarrow B^T = -B \end{array} \right\}$$

$$B) \text{ için } A + B + B^T = A + B - B = A \rightarrow \text{simetrik}$$

➔ CEVAP: B

SORULAR

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için $|A^6|$ determinantının değeri nedir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

Buna göre $|A^{-1}|$ determinantının değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{22}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{25}$ E) $\frac{6}{17}$

3. $A = \begin{bmatrix} x & 1 & -2 \\ 0 & y & 3 \\ z & 2 & 5 \end{bmatrix}$ için $|A| = 5$ ise,

$B = \begin{bmatrix} 2x & 0 & z \\ 2 & y & 2 \\ -12 & 9 & 15 \end{bmatrix}$ için $|B|$ değeri kaçtır?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

A) -9 B) -6 C) 12 D) 18 E) 0

5. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

A) 58 B) 64 C) 72 D) 84 E) 126

6. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için $ek(A)$ matrisi hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi A^{-1} hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

8. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ -x + 3y + z = 1 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümü hangisidir?

- A) (0, 0, 1) B) (1, -1, 0) C) (2, 1, 0)
D) (3, 2, 1) E) (1, 2, -3)

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-2y & y+3z & x+2z \\ 3y & x-3z & y-2z \end{vmatrix}$ determinatının değeri kaçtır?

- A) 0 B) xyz C) $x^2 + y^2 + z^2$
D) $xy + xz + yz$ E) 1

10. $A = \begin{bmatrix} x+2 & 2 \\ -5 & x-3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi yoksa x in alacağı değerler çarpımı kaçtır?

- A) 0 B) -2 C) 4 D) -6 E) 8

11. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi için,

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ ise $f(A)$ nedir?

- A) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 1 & m & -2 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi için A_{31} kofaktörünün değeri 40 ise m kaçtır?

- A) 0 B) 10 C) -12 D) 14 E) -16

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ için özdeğerler toplamı kaçtır?

- A) -2 B) 3 C) 0 D) -5 E) 8

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ k+1 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi için hangi k değeri

için A^{-1} yoktur?

- A) 0 B) 2 C) 4 D) -5 E) -3

15. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ matrisi için $\text{rank} A = 3$ ise k nedir?

- A) $k \neq \frac{3}{5}$ B) $k \neq \frac{8}{11}$ C) $k \neq \frac{20}{7}$
D) $k \neq \frac{9}{13}$ E) $k \neq -\frac{11}{3}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. $T(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer bir dönüşüm olmak üzere

$T(-1, 3) = (2, -4)$ $T(2, -2) = (-1, 5)$ ise $T(3, -1)$ değeri kaçtır?

- A) (3, 7) B) (2, 0) C) (4, -4)
D) (-1, 3) E) (0, 6)

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & k \\ -1 & 8 & 2 \\ 3 & -7 & -6 \end{bmatrix}$ matrisi için $\text{rank}(A) = 2$ ise k değeri kaçtır?

- A) 1 B) -2 C) 3 D) -4 E) 5

19. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ için $\det A = 3$ ise $\det(-A) + \det(2A)$ değeri kaçtır?

- A) 3 B) -6 C) -9 D) 15 E) 21

20. $A = \begin{bmatrix} i\pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i\pi}{4} \end{bmatrix}$ ise e^A matrisi hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{4} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} \pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{16} \end{bmatrix}$

ÇÖZÜMLER

1. $|A^6| = |A|^6$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow |A|^6 = 2^6 = 6^4$$

CEVAP: E

2. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 8 + (-2) = 22$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{22}$$

CEVAP: B

3. $|B| = \begin{vmatrix} 2x & 0 & z \\ 2 & y & 2 \\ -12 & 9 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{②}} 6 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & z \\ 1 & y & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

↓
②

$|A^T| = |A|$

$$= 6 \cdot 5 = 30$$

CEVAP: C

4. Alt üçgensel matris

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & & & \\ & \textcircled{3} & & \\ & & \textcircled{-2} & \\ & & & \textcircled{-3} \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-3) = 18$$

CEVAP: D

5. 1. satıra göre açalım:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} - R_1 + R_3 = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{7} \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 21 \cdot 6 = 126$$

CEVAP: E

6. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3$
 $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1$
 $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$
 $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4$

$$\text{ek}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

• Pratik Yol

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ için } \text{ek}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{ek}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

CEVAP: A

7. $A^{-1} = \frac{\text{ek}(A)}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}{-2} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

CEVAP: D

8.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2R_1 + R_2 \\ 3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -2R_2 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (2, 1, 0)$$

• Pratik Yol:

c) şıkkı için sağlama yapalım. $4 - 1 + 0 = 3 \checkmark$
 $6 + 1 + 0 = 7 \checkmark$
 $-2 + 3 + 0 = 1 \checkmark$

CEVAP: C

9.
$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-2y & y-3z & x+2z \end{vmatrix} \\ R_2 + R_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+y & x+y & x+y \end{vmatrix}$$

1. ve 3. satır orantılı olduğundan sonuç sıfır olur.

CEVAP: A

10. $|A| = 0 \Rightarrow \begin{aligned} (x+2)(x-3) + 10 &= 0 \\ x^2 - x - 6 + 10 &= 0 \\ x^2 - x + 4 &= 0 \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} = 4 \end{aligned}$

CEVAP: (C)

11. $f(x)$ polinom ve $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ köşegen matris ise,

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(a) & 0 & 0 \\ 0 & f(b) & 0 \\ 0 & 0 & f(c) \end{bmatrix} = f(A) - \begin{bmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CEVAP: D

12. $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ m & -2 \end{vmatrix} = 40$

$$-16 + 4m = 40$$

$$4m = 56$$

$$m = 14$$

CEVAP: D

13. $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 1-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & -\lambda & 4 \\ 6 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda^2 + \lambda^2 + 12) - 3(6 + 6\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 12) - 18 - 18\lambda$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 12 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 12\lambda - 18 - 18\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 32\lambda - 6$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{b}{a} = 3$$

• Pratik Yol:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1 + 0 + 2 = 3$$

CEVAP: B

14. $R_1 + R_2 = R_3$ olursa $\det A = 0$ olur.

A^{-1} mevcut olmaz.

$$k + 1 + 2 = 7 \Rightarrow k + 3 = 7 \Rightarrow k = 4$$

$$4 - 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$-5 + 3 = -2 \quad \checkmark$$

CEVAP: C

15. $\text{rank} A = 3 \Rightarrow |A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 3 \cdot (5k - 2) + (2k - 2) + 4 \cdot (2 - 5) \neq 0$$

$$15k - 6 + 2k - 2 - 12 \neq 0$$

$$17k \neq 20$$

$$k \neq \frac{20}{17}$$

CEVAP: C

16. $\begin{matrix} -2K_1 + K_2 & K_1 + K_3 & & K_2 + K_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 8 \\ -1 & 6 & -6 \end{bmatrix} \end{matrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} A = 2$$

CEVAP: C

17. $T(-1, 3) = (2, -4)$

$$\frac{2}{T(2, -2)} = (-1, 5)$$

$$T(-1, 3) = (2, -4)$$

$$+ \quad T(4, -4) = (-2, 10)$$

$$T(3, -1) = (0, 6)$$

CEVAP: E

18. 1. ve 3. sütunlar orantılı olursa $\text{rank}(A) = 2$ olur.

$$\frac{2}{k} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6}$$

$$k = -4 \text{ bulunur.}$$

CEVAP: D

19. $| -A | = (-1)^3 |A| = -3$

$$|2A| = 2^3 |A| = 24$$

$$\frac{24}{-3} = -8 \text{ bulunur.}$$

CEVAP: E

20. A köşegen matris $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ise

$$e^A = \begin{bmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{i\pi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}$$

CEVAP: B



3. BÖLÜM
LİNEER CEBİR / ÜNİTE TESTİ - 2

MATEMATİK

SORULAR

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi için A^{-1} matrisinin elemanları toplamı kaçtır?

A) $\frac{5}{8}$ B) 9 C) $\frac{13}{12}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{9}{6}$

2. Bir ABC üçgeni için

$$\begin{vmatrix} a & 3 & \sin A \\ b & 5 & \sin B \\ c & 7 & \sin C \end{vmatrix} \text{ değeri kaçtır?}$$

A) 0 B) abc C) 105
D) $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ E) 1

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + \sin 10^\circ & 1 + \cos 10^\circ & 1 \\ 1 + \cos 10^\circ & 1 - \sin 10^\circ & 1 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) $\sin 20^\circ$ B) $\cos 20^\circ$ C) 0
D) 1 E) -1

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 \cos^2 10^\circ & \sin 20^\circ \\ 1 & 2 \cos^2 40^\circ & \sin 80^\circ \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) 0 B) $\sin 70^\circ$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & x & -5 \\ -4 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ matrisi için $\text{rank}(A) = 1$ ise x kaçtır?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) 3
D) 2 E) -1

$$6. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ için } \text{rank}(A) < 3 \text{ ise } a \text{ kaçtır?}$$

A) 0 B) $\frac{22}{7}$ C) $-\frac{28}{3}$
D) $\frac{32}{5}$ E) $-\frac{1}{5}$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinden biri hangisidir?

A) $\frac{7-\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{6+i}{2}$ C) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$
D) $2-i$ E) 1

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinden biri hangisidir?

A) 3 B) $\frac{1+\sqrt{5}}{7}$ C) -1
D) $1-\sqrt{29}$ E) $\sqrt{23}-2$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerler çarpımı kaçtır?

A) -3 B) -11 C) 14 D) -5 E) 8

10. $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 6x+2y=k \end{cases}$ denklem sisteminin tek çözümü olması için k ne olmalıdır?

A) $k \in \mathbb{R}$ B) $k = -2$ C) $k = 7$
D) $k = 3$ E) $k = -6$

11. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 6x+ay=b \end{cases}$ denklem sisteminin sonsuz çözümü varsa $a+b$ ne olmalıdır?

A) 7 B) 9 C) 12 D) 18 E) 21

12. $\begin{cases} x-5y+4z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 7x-3y+mz=0 \end{cases}$ denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümlerinin olması için m ne olmalıdır?

A) 0 B) -1 C) 3 D) -4 E) 5

13. $V : (\mathbb{R}^2 : \mathbb{R})$ vektör uzayı için hangisi V nin alt uzayı değildir?

A) $2x+y=0$ B) $y=6x$ C) $2x-y=0$
D) $x=y$ E) $x-3y=1$

14. $V : (\mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$ vektör uzayı için hangisi V nin alt uzayıdır?

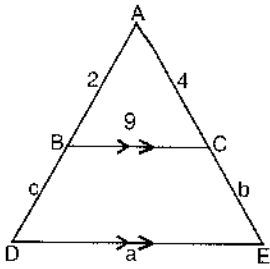
A) $x+y+z=0$ B) $x.y.z=0$ C) $x+y+z=1$
D) $2x-y+3z=5$ E) $2x-z=4$

15. $\mathbb{R}^3$ de $(2, a, 0)$, $(b, -3, 0)$, $(4, 5, 1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için a ile b arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

- A) $a \cdot b = 0$ B) $a + b = 3$ C) $ab = -6$
D) $2a - b = 2$ E) $a = 3b$

16. Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi lineer dönüşüm değildir?

- A) $L(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ 2x - y \end{bmatrix}$
B) $L(x, y) = \begin{bmatrix} 3x + 1 \\ 2y \end{bmatrix}$
C) $L(x, y) = \begin{bmatrix} 3x \\ -2x \\ x - y \end{bmatrix}$
D) $L(x, y) = [4x + y]$
E) $L(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

17.  $[BC] \parallel [DE]$ olmak üzere

re

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & 17 \\ 2+c & 4+b & a \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

- A) abc B) 0 C) 12 D) 72 E) $72abc$

18. Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi lineer dönüşümdür?

- A) $f(x, y) = (x+y, 2xy)$
B) $f(x, y) = (x^2, 2x-y)$
C) $f(x, y) = (x+1, y)$
D) $f(x, y) = (x+y, 2x-y)$
E) $f(x, y) = (2, x+y)$

19. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $f(x, y) = (2x-y, -x+2y)$ dönüşümünün standart baza göre matris gösterimi hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

20. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $f(x, y) = (2x+3y, -x+y)$ dönüşümünün $\{(1, -2), (-1, 3)\}$ bazına göre matris gösterimi hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜMLER

$$1. A^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \text{ elde edilir.}$$

(6) (4) (3)

CEVAP: C

2. Sinüs Teoremi gereği $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ olduğundan 1. ve 3. sütunlar orantılıdır, dolayısıyla determinant sıfır olur.

CEVAP: A

$$3. \begin{array}{c|cc|c} R_1 & 1 & 1 & 1 \\ -R_1 + R_2 & \sin 10^\circ & \cos 10^\circ & 0 \\ -R_1 + R_3 & \cos 10^\circ & -\sin 10^\circ & 0 \end{array}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} \sin 10^\circ & \cos 10^\circ \\ \cos 10^\circ & -\sin 10^\circ \end{vmatrix}$$

$$= -\sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ$$

$$= -1$$

CEVAP: E

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2\cos^2 10^\circ & \sin 20^\circ \\ 1 & 2\cos^2 40^\circ & \sin 80^\circ \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-K_1 + K_2$$

$$\oplus \begin{vmatrix} 1 & \cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ 1 & \cos 80^\circ & \sin 80^\circ \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos 20^\circ \cdot \sin 80^\circ - \cos 80^\circ \cdot \sin 20^\circ$$

$$= \sin(80^\circ - 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

CEVAP: C

$$5. \frac{2}{-4} = \frac{x}{3} = \frac{-5}{10} \text{ ise rank}(A) = 1 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow -4x = 6$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

CEVAP: B

$$6. \det(A) = 0 \text{ ise rank}(A) < 3 \text{ olur.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \oplus = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$= a \cdot (0+3) + 4 \cdot (6+1) = 0$$

$$3a + 28 = 0$$

$$a = -\frac{28}{3}$$

CEVAP: C

7. $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 11 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 11}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

CEVAP: A

8.

$$\begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 5 \\ 3 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda) \cdot (-3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 25) = 0$$

$$(2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 28) = 0$$

$$\lambda = 2, \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 29 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 29$$

$$\lambda - 1 = \pm \sqrt{29}$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{29}$$

CEVAP: D

9. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det(A)$

$$\begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 4 = -11$$

CEVAP: B

10. $\frac{3}{6} \neq \frac{-1}{2}$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{R}$ için tek çözüm olur.

CEVAP: A

11. $\frac{2}{6} - \frac{1}{a} = \frac{5}{6}$

$$a = 3$$

$$b = 15$$

$$a + b = 18$$

CEVAP: D

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & m \end{bmatrix}$ için $\det(A) = 0$ ise sonsuz çözüm olur.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -3R_1 + R_2 & 0 & 16 & -14 \\ 7 & -3 & m & -7R_1 + R_3 & 0 & 32 & m - 28 \end{array} \right] \text{orantılı.}$$

$$\frac{16}{32} = \frac{-14}{m-28}$$

$$m = 0 \text{ olur.}$$

CEVAP: A

13. e) şıkkı için,

$$x_1 - 3y_1 = 1$$

$$x_2 - 3y_2 = 1$$

$$\begin{array}{r} + \\ (x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Toplamaya göre kapalı değil $\Rightarrow$ alt uzay değil.

CEVAP: E

14. a) seçeneği için,

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$$

- Toplama göre kapalı
- Boştan farklı
- Skaler çarpıma göre kapalı

Alt uzay oluşturur.

CEVAP: A

15. $\det(A) = 0 \Rightarrow$ lineer bağımlı olur.

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 0 & \oplus \\ b & -3 & 0 & \ominus \\ 4 & 5 & 1 & \oplus \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-6 - ab = 0$$

$$ab = -6$$

CEVAP: C

16. b) şıkkı için,

$$L(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \neq L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2)$$

CEVAP: B

17. 1. ve 3. satırlar orantılı olduğundan determinant sıfır olur.

CEVAP: B

18. d) seçeneği için,

$$\left. \begin{aligned} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \text{ ve} \\ f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda f(x, y) \end{aligned} \right\} \text{ sağlanır.}$$

Dolayısıyla lineer bir dönüşümdür.

CEVAP: D

$$19. \begin{bmatrix} 2x + (-1)y \\ (-1)x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

aradığımız matris

CEVAP: B

$$20. (1, -2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ -x + y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(-1, 3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ -x + y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ matrisi}$$

CEVAP: C



3. BÖLÜM

LİNEER CEBİR / ÜNİTE TESTİ - 3

MATEMATİK

SORULAR

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x, y) = (2x+y, -x+3y)$

$g(x, y) = (-x+3y, 2x+3y)$

} dönüşümleri için

fog(x, y) dönüşümünün standart baza karşılık gelen matrisi nedir?

A) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -8 & 9 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

 $f(x, y, z) = (2x+y, y-3z)$ lineer dönüşümün çekirdeği (Kerf) hangisidir?

A) $(2k, k, -3k), k \in \mathbb{R}$

B) $(-3k, 6k, 2k), k \in \mathbb{R}$

C) $(2, -1, 3)$

D) $(2k, -3k, k), k \in \mathbb{R}$

E) $(6, -4, 7)$

3. Z/7 de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{cases} x - 3y + 5z = 8 \\ -x + 4y - 2z = 5 \\ 3x - 11y + kz = 7 \end{cases}$ denklem sisteminin tek çözümünün olması için k hangi koşula sahip olmalıdır?

A) $k \neq -1$

B) $k \neq 9$

C) $k \neq 5$

D) $k \neq -3$

E) $k \neq 4$

5. $\vec{A} = (1, -2, 3)$, $\vec{B} = (-2, 1, 5)$, $\vec{C} = (-4, 5, m)$ vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ uzayını germemeleri için m ne olmalıdır?

A) -5

B) 3

C) -1

D) 4

E) 0

6. $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ matrisi $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ vektörünü $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörüne dönüştürüyor ise $\vec{w} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörünü hangisine dönüştürür?

A) $\begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$

7. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (4x-2y, y+3z)$ doğrusal dönüşümünün çekirdeğinin boyutu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbb{R}^2$ yi gerer?

A) $\{(1, -3), (-2, 6)\}$
 B) $\{(0, 0), (3, -5)\}$
 C) $\{(3, 2)\}$
 D) $\{(1, -2), (2, 5)\}$
 E) $\{(0, 0), (1, 1), (-2, -2)\}$

9. Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır?

A) $\{(1, -2, 4), (4, -5, 7)\}$
 B) $\{(2, 1, -1), (6, 3, -3), (2, -7, 9)\}$
 C) $\{(1, 1, 1), (0, 0, 0), (4, -3, 5)\}$
 D) $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (5, 7, 9)\}$
 E) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$

10. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = (2x + 3y, -4x+6y)$ lineer dönüşümünün çekirdeği (Kerf) hangisidir?

A) $(-k, 3k)$ B) $(3k, -2k)$ C) $(0, 0)$
 D) $(3k, 2k)$ E) $(2k, k)$

11. $V, \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tüm fonksiyonların uzayı olmak üzere, hangisi V nin alt uzayıdır?

A) $\{f \mid f(5) - f(7) = 5\}$
 B) $\{f \mid f(1) \cdot f(2) = 1\}$
 C) $\{f \mid f(0) \cdot f(1) = 0\}$
 D) $\{f \mid f(3) - f(1) = 0\}$
 E) $\{f \mid 2f(1) - f(3) = 2\}$

12. $\begin{cases} x + y + mz = -2 \\ x + my + z = -2 \\ mx + y + z = -2 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin sonsuz çözüme sahip olması için m ne olmalıdır?

A) 1 B) -2 C) 0 D) 3 E) -4

13. $\begin{cases} x + y + mz = -2 \\ x + my + z = -2 \\ mx + y + z = -2 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümsüz olması için m ne olmalıdır?

A) 1 B) -2 C) 0 D) 3 E) -4

14. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -7 & 8 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix} = m$ ise $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -7 & 8 & 4 \\ a-2 & b+1 & c-5 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

A) m B) $2m+8$ C) $3m-8$
 D) $m+144$ E) $m-172$

15. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi için kaç tanesi doğrudur?

- I. Singüler (tekil) matristir.
- II. Simetrik matristir.
- III. Skaler matristir.
- IV. Özdeğerleri $\{-3, -7\}$ dir.
- V. $A^2 - 10A + 21I_{2 \times 2} = 0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu hangisidir?

- A) $\lambda^2 - 25 = 0$ B) $\lambda^2 - \lambda - 13 = 0$ C) $\lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0$
- D) $\lambda^2 + 2\lambda - 17 = 0$ E) $\lambda^2 + 9 = 0$

17. $(m + n - 12)xy + 3x + 5z = 8$
 $5x + (-2m + n - 6)x^2y + 5y = 6$
 $(a - 2)xyz + 4y - 5z = 6$

denklemler sistemi lineer olduğuna göre, $m - n + a$ değeri kaçtır?

A) 0 B) 4 C) -6 D) -10 E) 14

18. $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün

$\{(1, 3, 5), (3, 2, 1), (-1, 2, 5)\}$ vektörleri tarafından gerilmesi için a, b, c arasındaki ilişki ne olmalıdır?

- A) $a - 2b + c = 0$
- B) $a + b + c = 0$
- C) $a - 3b + 5c = 1$
- D) $a + 3b = 5c$
- E) $a + b + c = 5$

19. $(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$ vektör uzayının

$\{(1, -3, 5), (-1, 4, 7), (0, 1, 12)\}$ vektörleri ile gerilen W alt uzayının boyutu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

20. $V, \mathbb{R}$ üzerinde 2×2 tipinde matrislerin vektör uzayı ise hangisi V vektör uzayının alt vektör uzayı değildir?

- A) $\left\{ \begin{pmatrix} 2x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- B) $\left\{ \begin{pmatrix} 2x & y \\ z & z-y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- C) $\left\{ \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ y+z & 2y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- D) $\left\{ \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- E) $\left\{ \begin{pmatrix} x+2y & y \\ 0 & z-y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

ÇÖZÜMLER

1. f için $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

g için $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

fog için $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

CEVAP: D

2. $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$

$y - 3z = 0 \Rightarrow y = 3z$

$y = 6k$ alalım.
 $\begin{cases} x = -3k \\ z = 2k \end{cases}$ bulunur. $\begin{cases} (-3k, 6k, 2k) \\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$

CEVAP: B

3. $A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{10} = \begin{bmatrix} \frac{2+28}{10} & \frac{-1+21}{10} \\ \frac{-1+21}{10} & \frac{3+7}{10} \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

CEVAP: C

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -11 & k \end{bmatrix}$ matrisi için $\det(A) \neq 0$ olmalı.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -11 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot (4k - 22) + 3 \cdot (-k + 6) + 5 \cdot (11 - 12) \neq 0$
 $4k - 22 - 3k + 18 - 5 \neq 0$
 $k \neq 9$ bulunur.

CEVAP: B

5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & m \end{vmatrix} = 0$ ise $\mathbb{R}^3$ gerilmez.

$1 \cdot (m - 25) + 2 \cdot (-2m + 20) + 3 \cdot (-10 + 4) = 0$
 $m - 25 - 4m + 40 - 18 = 0$
 $-3m - 3 = 0$
 $m = -1$

CEVAP: C

6. $-2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$

CEVAP: E

7. $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3z \\ 4x = 2y \Rightarrow y = 2x \end{cases}$
 $y = 6k$ alalım, dolayısıyla
 $z = -2k$
 $x = 3k$

$(3k, 6k, -2k), k \in \mathbb{R}$

1 serbest değişken olduğundan boyut 1 dir.

CEVAP: B

8. Eleman sayısı en az 2 ($\text{boy}(\mathbb{R}^2)$) olan ve lineer bağımsız olan kümeyi arıyoruz.

d) seçeneği 2 elemanlı ve $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

lineer bağımsız olduğundan $\mathbb{R}^2$ yi gerer.

CEVAP: D

15. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(5-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$

$5-\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 3$

$5-\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = 7$

I. $\det(A) = 21 \neq 0$ X

II. Simetriktr. ✓

III. Skaler matris değildir. X

IV. Özdeğerler $\{3, 7\}$ dir. X

V. Cayley Hamiltondan

$A^2 - 10A + 21I_{2 \times 2} = 0$ ✓

2 tanesi doğrudur.

CEVAP: B

16. $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$5-\lambda-5\lambda+\lambda^2+6=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+11=0$

CEVAP: C

17. $\begin{cases} m+n-12=0 \\ -2m+n-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m-n+12=0 \\ -2m+n-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=10 \end{cases}$

$a-2=0 \Rightarrow a=2$

$m-n+a=2-10+2=-6$

CEVAP: C

18. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & a \\ 3 & 2 & 2 & | & b \\ 5 & 1 & 5 & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_2, -5R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & a \\ 0 & -7 & 5 & | & b-3a \\ 0 & -14 & 10 & | & c-5a \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & a \\ 0 & -7 & 5 & | & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & | & c-5a-2b+6a \end{bmatrix} \xrightarrow{\parallel 0}$

$c+a-2b=0$

$a-2b+c=0$

CEVAP: A

19. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_3}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ boyut = 2

CEVAP: C

20. d) seçeneği için,

$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 1 \\ y_1+y_2 & z_1+z_2 \end{pmatrix}$

CEVAP: D

SORULAR

1. $\{2t^2+3, t-3, at+6\}$ kümesinin $V = P_2(t)$ ikinci derece polinomlar uzayını girmesi için a ne olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) -1 D) 3 E) -2

2. $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tüm fonksiyonların vektör uzayı olsun.

Hangisi V nin alt vektör uzayı değildir?

A) $\{f \text{ tek fonksiyon}\}$
 B) $\{f \text{ türevlenebilen fonksiyon}\}$
 C) $\{f(5) = 0 \text{ sağlayan fonksiyon}\}$
 D) $\{2f(5) = f(2) \text{ sağlayan fonksiyon}\}$
 E) $\{f(2) = f(1) + 3 \text{ sağlayan fonksiyon}\}$

3. $V = P_2(t)$ ikinci dereceden polinomlar uzayı olsun.

$\begin{cases} \vartheta_1 = t^2 - 3t + 5 \\ \vartheta_2 = t^2 + 2 \end{cases}$ olmak üzere $\vartheta = at^2 + bt + c$ vektörünün $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ tarafından gerilmesi için a, b, c arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

A) $a+b+c = 0$ B) $2a = b+c$ C) $a-b+c = 1$
 D) $a = 3b+2c$ E) $4a-b+c = 2$

4. Aşağıdakilerden hangisi $P_2(t)$ 2. dereceden polinomlar uzayını gerer?

A) $\{2t^2 + 1, t - 1, 2t^2 + t\}$
 B) $\{t^2 + 1, t + 1, t^2 + t\}$
 C) $\{t^2 - 3t + 1, 2t + 4\}$
 D) $\{t^2 + 2t + 1, 2t + 1\}$
 E) $\{3t^2 + 1, -t^2 + t, 2t^2 + t + 1\}$

5. Aşağıdakilerden hangisi $V = P_2(t)$ 2. dereceden polinomlar uzayının alt uzayı değildir?

$P_2(t) = \{a_2 t^2 + a_1 t + a_0; a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$

A) $a_0 = 0$ B) $a_1 = 5$ C) $a_2 - a_1 = 2a_0$
 D) $a_2 = 3a_1$ E) $a_1 + a_0 = a_2$

6. Aşağıdakilerden hangisi satırca eşelon matrisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 D) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

7. Aşağıdakilerden hangisi satırca indirgenmiş eşelon matristir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ -1 & 2 & \beta \\ \alpha & 3 & 2\beta \end{vmatrix} = 5$ ise $\begin{vmatrix} 1 & -1+x & 2\alpha \\ \alpha & 2+\alpha x & 6 \\ 3 & \beta+3x & 6\beta \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

A) 20 B) -15 C) 10 D) -5 E) 0

9. $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere,
 $L(x, y, z) = (2x - y, 4x + y - z, 2y - 3z)$ lineer dönüşümün izi (trace) kaçtır?

A) 4 B) -3 C) 2 D) -1 E) 0

10. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$T(x, y, z) = (x-2y+5z, 2x+y-3z, 4x-3y+7z)$ dönüşümünün standart bazına karşılık gelen matrisin rankı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11. Aşağıdakilerden hangisi elemanter matristir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ matrisi $I_{2 \times 2}$ birim matrise en az kaç elemanter satır işlemi uygulanarak elde edilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi regüler (tersinir) ise kaç tanesi doğrudur?

I. $ad - bc \neq 0$
 II. Ters vardır.
 III. Birim matrise denk değildir.
 IV. $Ax = 0$ homojen sisteminin sonsuz çözümü vardır.
 V. Elemanter matrislerin çarpımıdır.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. V vektör uzayı ve $\vec{u}, \vec{v} \in V$ iki lineer bağımsız vektör ise hangisi lineer bağımlıdır?

- A) $\{\vec{u} + \vec{v}, 2\vec{u} - 3\vec{v}\}$
 B) $\{-5\vec{u}, 2\vec{v}\}$
 C) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$
 D) $\{5\vec{u}, 4\vec{v}\}$
 E) $\{-2\vec{u}, 4\vec{v}\}$

15. 3×3 kare matrise hangi işlem yapılırsa determinant değeri değişmez?

- A) 3. satırı (-1) ile çarpmak
 B) 2. ve 3. sütunları yer değiştirmek
 C) 3. satırı 2 ile çarpıp 1. satıra eklemek
 D) 1. satırı 4 ile çarpmak
 E) 1. ve 2. satırları yer değiştirmek

16. Aşağıdakilerden hangisi $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ matrisine denk değildir?

- A) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
 D) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

17. $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ye lineer bir dönüşüm olmak üzere,

$L(-1, 2, 3) = (1, 4)$
 $L(2, -1, 0) = (-2, 5)$ olduğuna göre, $L(-1, 5, 9)$ nedir?

- A) $(8, -7)$ B) $(2, -5)$ C) $(-6, 10)$
 D) $(-11, 3)$ E) $(1, 17)$

18. $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$L(x, y, z) = (3x + 5y - 2z)$ olmak üzere, hangisi $\text{çek}(L)$ elemanı değildir?

- A) $(1, -1, -1)$ B) $(3, 1, 7)$ C) $(2, 4, 13)$
 D) $(-1, 3, 6)$ E) $(4, 7, 5)$

19. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özvektörlerinden biri hangisidir?

- A) $(-3, 2)$ B) $(2, 3)$ C) $(1, -2)$
 D) $(2, 1)$ E) $(1, 1)$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere $Ax = 0$ homojen sisteminin çözüm uzayının boyutu kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1+x & \alpha \\ \alpha & 2+\alpha x & 3 \\ 3 & \beta-3x & 3\beta \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 2 & 3 \\ 3 & \beta & 3\beta \end{vmatrix}$$

$|A^T| = |A| = 5$

$= 10$

CEVAP: C

9.
$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & -1 & 0 \\ 4 & \textcircled{1} & -1 \\ 0 & 2 & \textcircled{-3} \end{bmatrix}$$

$\text{iz}(A) = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 2 + 1 - 3 = 0$

CEVAP: E

10.
$$\left[\begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & 5 & \\ 2 & 1 & -3 & -2R_1 + R_2 \\ 4 & -3 & 7 & -4R_1 + R_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & 5 & \\ 0 & 5 & -13 & \\ 0 & 5 & -13 & -R_2 + R_3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & 5 & \\ 0 & 5 & -13 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right] \text{rank}(A) = 2$$

CEVAP: C

11. Birim matrise tek satır (sütun) işlemi yapılarak elde edilen matrise elemanter matris denir. Burada (b) şıkkı için,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -3R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tek satır işlemi vardır.}$$

CEVAP: B

12.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow -5R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{7R_1} \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

3 satır işlemi

CEVAP: C

13. A tersinir $\rightarrow |A| \neq 0$ ✓
 $\rightarrow$ Tersli vardır. ✓
 $\rightarrow$ Birim matrise denktir. X
 $\rightarrow$ Tek çözüm vardır. X
 $\rightarrow$ Elemanter matrislerin çarpımıdır. ✓

CEVAP: C

14. $\{\vec{u}, \vec{O}\}$ lineer bağımlıdır.

CEVAP: C

15. Bir satırı çarpıp diğer satıra eklemek determinat değerini değiştirmez.

CEVAP: C

16. (c) için $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ olduğundan

$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22 \neq 0$ matrise denk değildir.

CEVAP: C

17. $3/L(-1, 2, 3) = (1, 4)$
 $L(2, -1, 0) = (-2, 5)$

$L(-3, 6, 9) = (3, 12)$
 $L(2, -1, 0) = (-2, 5)$

$L(-1, 5, 9) = (1, 17)$

CEVAP: E

18. $L(4, 7, 5) = 3.4 + 5.7 - 2.5$
 $= 12 + 35 - 10 = 37 \neq 0$

CEVAP: E

19. $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(3-\lambda) \cdot (-1-\lambda) = 0$

$\begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

• $\lambda = 3$ için,

$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vartheta_2 = 0$
 $\vartheta_2 = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ özvektör

• $\lambda = -1$ için,

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 4\vartheta_1 + 2\vartheta_2 = 0$
 $\vartheta_1 = 1 \Rightarrow \vartheta_2 = -2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ özvektör

CEVAP: C

20. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2, 3R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x + 2y - z = 0$

3 bilinmeyen $\begin{cases} 3 - 1 = 2 \text{ değişkene bağlı sonsuz} \\ \text{çözüm, yani çözüm uzayı boyutu} \\ 1 \text{ denklem} \end{cases} 2 \text{ dir.}$

CEVAP: C